



# Założenia probabilistycznego modelu rozkładu gęstości ziaren w warstwach łoża osadzarki

Stanisław GŁOWIAK

<http://doi.org/10.29227/IM-2019-01-39>

Submission date: 11-07-2018 | Review date: 02-04-2019

## Abstrakt

*W pracy przedstawiono istotne ograniczenia rozpraszania cząstek w warstwach łoża osadzarki i skutki tych ograniczeń objawiające się w procesie osadzania. Ograniczenia te są wynikiem znacznego rozpraszania cząstek w stosunkowo wąskim zakresie gęstości warstw łoża. Do tej pory są one pomijane lub niewłaściwie przedstawiane w opisach zjawisk zachodzących w procesie osadzania. Przedstawiono założenia modelu łoża osadzarki uwzględniającego poprawnie te ograniczenia. Model ten jest także tak skonstruowany, że nie ogranicza gęstości tworzących się warstw jak i rozkładu mas w poszczególnych warstwach. Możliwe jest jego doświadczalne sprawdzenie w odpowiednio przygotowanych warunkach laboratoryjnych. Dodatkowo model pozwala wyjaśnić niektóre błędy istniejące w teorii wzbogacania grawitacyjnego.*

*Słowa kluczowe: wzbogacanie węgla kamiennego, osadzarka, modelowanie osadzania, krzywe rozdziału, rozpraszanie ziaren*

## Wstęp

W teorii wzbogacania grawitacyjnego do dziś istnieje poważny nie do końca rozwiązany problem. Jest to zagadnienie obliczenia wychodów i parametrów jakościowych produktów wzbogacania w osadzarkach dla znanego składu densymetrycznego wzbogacanego materiału i parametru charakteryzującego efektywność pracy wzbogacalnika. Obecnie zagadnienie to jest rozwiązywane w dużym przybliżeniu przez przyjęcie funkcji aproksymującej krzywą rozdziału o założonym rozproszeniu charakteryzującym jakość wzbogacania. Przybliżenie rozwiązania wynika z przyjęcia wybranej idealizowanej aproksymanty krzywej rozdziału niezbyt dokładnie pasującej do rzeczywistego kształtu tej krzywej tym bardziej, że rzeczywisty jej kształt pochodzi z danych eksperymentalnych obciążonych znacznymi błędami pomiarowymi. Ponadto w literaturze daje się też zauważyć powątpiewanie w niezależność krzywej rozdziału od składu densymetrycznego wzbogacanego materiału (Hughes 1967). Jednym z możliwych rozwiązań przedstawianego zagadnienia może być odpowiednio precyzyjny model procesu wzbogacania.

Powszechnie nie jest zauważana w teoretycznych rozważaniach różnica między wzbogacaniem zachodzącym z wysoką skutecznością jak we wzbogacalnikach z cieczą ciężką, a pozostałymi wzbogacalnikami grawitacyjnymi, których efektywność jest znacznie niższa. Ta różnica powoduje, że zjawiska związane z procesem wzbogacania nieistotne dla niskich rozprożeń silnie zmieniają obraz tego procesu dla rozprożeń większych. Metody oceny pracy wzbogacalników, szczególnie metody związane z krzywą rozdziału nie pozwalają na zauważenie tych zjawisk. W przypadku osadzarek nie zauważanie tych różnic doprowadziło do pomijania zjawisk mających istotny wpływ na wzbogacanie takich jak ograniczenia dla fizycznych mechanizmów tworzenia się zróżnicowanych gęstościowo warstw w łożu osadzarki i istnienie naturalnych sprzężeń zwrotnych w procesie osadzania. Zjawiska te mogą być obiektem badań modeli, o ile te modele poprawnie przedstawiają stan łoża osadzarki. Taką możliwość stwarzają modele

klasy DEM, lecz dla tego rodzaju modelowania konieczne jest znaczne zwiększenie liczby gęstościowych frakcji materiału surowego i liczby cząstek w modelu łoża osadzarki (Mishra 2001). Duże szanse na właściwe przedstawienie stanu łoża osadzarki mają modele probabilistyczne poprawnie przedstawiające ograniczenia rozpraszania się cząstek i nie ograniczające zakresu gęstości tworzących się warstw. Model, którego szczegóły założeń są przedstawiane w tym opracowaniu należy do tego rodzaju modeli.

## Podstawy prezentowanego modelu

Poddawany wzbogacaniu w osadzarkach materiał w wyniku działania pulsacyjnego ruchu wody przesuwany się po sicie i jednocześnie rozwarstwia się tak, że w końcowej części przedziału maszyny cięższe frakcje zajmują miejsce w dolnych warstwach łoża, a lżejsze w górnych. Takie usytuowanie cząstek odpowiada stanowi o minimalnej energii potencjalnej dla aktualnie zachodzącego w maszynie rozpraszania się cząstek o tej samej gęstości w różnych warstwach, z tym, że różnym rozproszeniom cząstek odpowiadają różne wartości minimalnej energii potencjalnej cząstek łoża.

Przedstawiany model ogranicza się do stanu ustalonego rozkładu cząstek w końcowej części przekroju podłużnego przedziału osadzarki przed strefą rozdzielania rozwarstwowanego materiału na produkt górny i dolny. W związku z tym ten model nie pozwala śledzić czasowych przebiegów zmian rozproszenia cząstek w warstwach łoża osadzarki.

W osadzarkach zachodzą jednocześnie dwa procesy: proces wzbogacania (klasyfikacji gęstościowej) i proces klasyfikacji ziarnowej. W rzeczywistym procesie wzbogacania różnice w wymiarach i kształcie poszczególnych ziaren można traktować jako podstawowe zakłócenie tego procesu. W dalszej części tej pracy losowa zmienność składu ziarnowego wzbogacanego materiału nie będzie rozważana. Przyjmuje się tylko, że ta zmienność wpływa na losowe rozpraszanie się cząstek tej samej gęstości w różnych warstwach. Nie będą także rozważane szczegółowo fizyczne zjawiska związane

z procesem rozwarstwiania, a przyjmuje się, że zbiór wzbogacanych cząstek dąży do stanu o minimalnej energii potencjalnej, co wynika z zasady najmniejszego działania. Można przyjąć, że istnienie zjawiska rozpraszania się cząstek o tej samej gęstości w różnych warstwach może być interpretowane także jako skutek działania ograniczeń wynikających z tej zasady.

Przyjęcie powyższych założeń jest wyrazem dekompozycji zagadnienia rozpraszania się cząstek w łóżu osadzarki na dwa oddzielne zagadnienia, z których pierwsze związane ze szczegółami fizycznych przyczyn powstawania tego rozproszenia zostanie pominięte. Pominięcie to jest wynikiem nieistnienia prac zawierających analizy sił działających na poszczególne cząstki w łóżu osadzarki dostatecznie zbliżonych w danymi eksperymentalnymi. Istniejące prace (Innohri 1978), (Srinivasan 1999), (Mishra 2001) można potraktować tylko jako wstęp do opracowania modelu wiążącego wszystkie zmienne procesu osadzania z istniejącym w tym procesie rozpraszaniem cząstek o stałej gęstości. Praca taka oparta na zasadach mechaniki stochastycznej z rozważeniem trójfazowego ośrodka, jakim jest przedział osadzarki, do tej chwili nie powstała i obecnie nie widać szans na jej powstanie. Znaczną trudność takiej analizy stanowi losowa zmienność istotnych cech wzbogacanego materiału, silnie nieliniowe zależności opisujące dynamikę ruchu wody i cząstek fazy stałej oraz nieliniowe sprzężenia zwrotne. Drugie z tych zagadnień obrazujące technologiczne i związane z tym także ekonomiczne skutki istnienia rozproszenia jest możliwe do rozpatrzenia dla z góry przyjętych postaci rozkładu opisującego rozpraszanie się cząstek i jest rozważane w tej pracy. Generalnie prezentowany model opiera się na podstawowym założeniu, że wszystko to, co nie jest dostatecznie wyjaśnione oraz to nad czym nie jesteśmy w stanie odpowiednio zapanować w trakcie technicznej realizacji procesu osadzania traktowane jest jako przyczyna rozpraszania się cząstek (ziaren) o stałej gęstości w warstwach o różnej gęstości.

Rozważany model może być uważany jako wynik takiego działania, kiedy losowo wybraną cząstkę nadawy wrzucamy do losowo wybranej warstwy przypisując jej z góry określone prawdopodobieństwo pozostania w tej warstwie zależne od różnicy gęstości cząstki i warstwy. Jest to założenie bardzo zbliżone do zastosowanego w pracy (Zapała 1988), lecz cele i stosowane metody obu tych prac są wyraźnie różne, a ponadto w tej pracy nie ma fizycznie niepoprawnych założeń istniejących w pracy Zapały.

Zasadniczym celem tworzenia tego modelu jest pokazanie znaczenia ograniczeń w możliwościach rozpraszania się cząstek do tej pory pomijanych w teoretycznych rozważaniach. Ograniczenie te stają się bardzo istotne dla rzeczywistej pracy osadzarek skazanych w wyniku zasady rozdziału i różnych zaniedbań w praktyce ich używania na działanie ze względnie niską efektywnością wzbogacania. Dodatkowym celem konstruowania tego modelu jest pokazanie poprawnych fizycznych interpretacji zjawisk losowych zachodzących w procesie osadzania i ich technologicznych skutków oraz przedstawienie modelu warstw łóża osadzarki pozwalającego obliczyć rozkład cząstek w poszczególnych warstwach i gęstości tworzących się warstw z dokładnością lepszą niż w modelach znanych do tej pory.

## Wymagane cechy poprawnego modelu

Podstawowe wymaganie, które ten model musi spełniać to prawidłowe przedstawienie stanu łóża w trzech podstawowych sytuacjach teoretycznie możliwych w trakcie pracy osadzarki to jest wzbogacania idealnego, wzbogacania rzeczywistego i całkowitego braku wzbogacania. Tego wymagania nie spełnia w całości żaden z istniejących modeli (Budryk 1949), (Zapała 1988), (Cierpisz 2012). (Woolacott 2015). Brak spełnienia tych wymagań wynika przede wszystkim z nieistnienia w tych modelach właściwych ograniczeń dla rozpraszania się cząstek oraz z istnienia zbędnych ograniczeń dla gęstości warstw, co powoduje, że rozkład warstw łóża przedstawiany przez te modele nie jest podobny do jego rzeczywistego stanu. W przypadku modelu Kinga opisanego w dwu ostatnich z przywołanych pozycji literatury wątpliwości może budzić sposób modelowania wykorzystujący zjawisko dyfuzji nie istniejące w procesie osadzania w takim stopniu, aby istotnie wpływało na wynik modelowania.

Postuluje się także, aby rozważany model wyjaśniał działanie osadzarki dla dowolnego składu densymetrycznego nadawy, w tym także dla tak szczególnych idealizowanych przypadków jak istnienie w materiale surowym tylko dwu lub trzech gęstości cząstek. Po uzupełnieniu o zależność wiążącą zawartość popiołu z gęstością poszczególnych cząstek model powinien pozwalać na obliczenie wychodu i zawartości popiołu w produktach wzbogacania dla wybranej gęstości rozdziału. Przyjmuje się także możliwość rozszerzenia tego modelu dla opisanego stanu łóża osadzarki jako funkcji położenia danej warstwy w stosunku do sita. Jest to możliwe, gdy znane są zależności określające związek między gęstością cząstek i ich rzeczywistą gęstością nasypową oraz gdy znany jest profil prędkości poziomej poszczególnych warstw dla ustalonej ich gęstości.

Wzbogacanie idealne zachodzi, gdy w każdej warstwie łóża znajdują się tylko cząstki wzbogacanego materiału o jednakowej gęstości i różnej od gęstości cząstek sąsiednich warstw. W przypadku wzbogacania rzeczywistego w każdej warstwie znajdują się cząstki różnych gęstości i zakres tych gęstości powinien być związany z zachodzącym w tym wzbogacaniu rozpraszaniem się cząstek o stałej gęstości w różnych warstwach oraz składem gęstościowym wzbogacanego materiału. Dla całkowitego braku wzbogacania każda warstwa składa się z cząstek wszystkich gęstości, co jest równoważne istnieniu tylko jednej warstwy zawierającej wszystkie cząstki o różnych gęstościach.

W tym miejscu konieczne jest zauważenie, że tylko stanowi idealnego wzbogacania odpowiada istnienie warstw o wszystkich gęstościach cząstek istniejących we wzbogacanym materiale. Zatem dla wzbogacania rzeczywistego powinno w modelu zachodzić zjawisko zanikania niektórych warstw w miarę pogarszania się jakości wzbogacania. Warto zwrócić uwagę na ten fakt, ponieważ żaden ze znanych z literatury modeli rozwarstwiania się materiału w łóżu osadzarki nie zakłada istnienia takiej sytuacji, jak i to, że nie pojawia się ona jako wynik działania znanego modelu. Zanikanie warstw o różnych gęstościach w istotny sposób zmienia obraz działania osadzarki, co zostanie pokazane w dalszej części tej pracy.

Pojawia się pytanie czy zjawisko to ma istotne znaczenie dla efektywności działania osadzarki i czy brak opisu tego zjawiska w aktualnie istniejącej literaturze jest skutkiem jego

marginalnego znaczenia. Prawidłowa odpowiedź na to pytanie z uwzględnieniem dostępnych aktualnie danych eksperymentalnych jest trudna, ponieważ te istniejące dane są dalece niewystarczające i ograniczają się do znajomości empirycznej krzywej rozdziału oraz rozproszenia prawdopodobnego  $E_p$  lub imperfekcji  $I$  jako wyników przeprowadzonych badań. Żadne z przeprowadzonych badań laboratoryjnych (Jonkers 1998), (Kowol 2010), (Woolacott 2015) nie opisuje wszystkich zależności pokazywanych przez przedstawiany model, a powodem tego jest zbyt niska dokładność przeprowadzonych analiz, aby można było te związki zauważyć eksperymentalnie.

W teorii wzbogacania grawitacyjnego zwykle rozważane są funkcje ciągłe odpowiadające istnieniu nieskończenie wielu frakcji gęstościowych wzbogacanego materiału. Funkcje te powstają w wyniku znacznej idealizacji dyskretnych wyników przeprowadzanych pomiarów. Zdaniem autora tej pracy opisywanie wielu zjawisk w teorii grawitacyjnego wzbogacania funkcjami ciągłymi nie ma pełnego uzasadnienia biorąc pod uwagę ograniczoną dokładność pomiarów charakterystyk wzbogacanego materiału. W tej pracy, dla zachowania jednak tradycyjnie stosowanych zasad, tylko bardzo ogólne idee będą przedstawiane także dla funkcji ciągłych, natomiast przedstawiany model zasadniczo opisuje stan warstw łóża tylko dla skończonej ilości frakcji gęstościowych wzbogacanego materiału i ilości warstw łóża.

### Postać i parametry rozkładu prawdopodobieństwa rozpraszania cząstek

Naturalnym skutkiem przedstawionego powyżej podejścia do analizowanego zagadnienia musi być przyjęcie z góry określonego rozkładu prawdopodobieństwa opisującego rozproszenie się cząstek o znanej gęstości w warstwach łóża, jakie utworzą się w wyniku przyjęcia tego rozkładu. W tym miejscu pojawia się konieczność uzasadnienia dla postaci wybranego rozkładu, jaki i również jego parametrów.

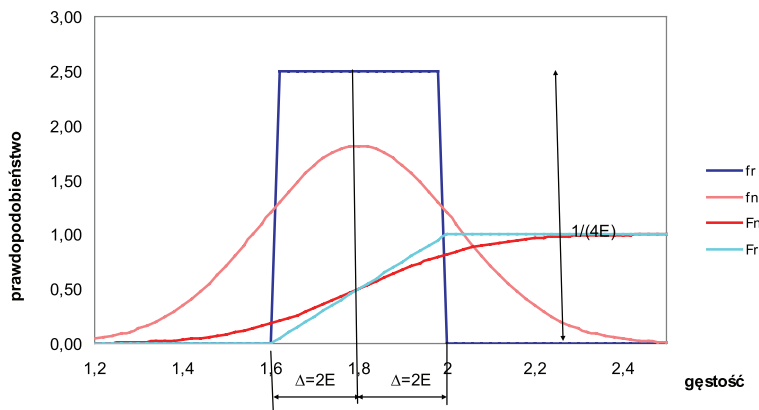
Jako zmienną losową rozkładu przyjmuje się średnią gęstość warstwy  $\rho_w$ , do której mogą trafić cząstki o gęstości  $\rho_c$ , która to gęstość  $\rho_c$  jest także wartością oczekiwaną tego rozkładu. Przyjęcie założenia, że wartością oczekiwaną

tego rozkładu jest gęstość rozpraszanych cząstek  $\rho_c$  wynika z konieczności spełnienia warunku, aby dla wzbogacania idealnego gęstość warstwy była równa gęstości tworzących ją cząstek. Parametrem rozkładu określającym rozproszenie zmiennej losowej jest jego odchylenie standardowe związane z innym parametrem najczęściej używanym w teorii wzbogacania do oceny skuteczności procesu wzbogacania nazywanym odchyleniem prawdopodobnym, a w rachunku prawdopodobieństwa określanym jako odchylenie ćwiartkowe (Kubik 1982). Jest to połowa różnicy górnego i dolnego kwartyla rozkładu. Parametr ten charakteryzujący rozpraszanie cząstek o danej gęstości w warstwach oznaczmy jako  $E$  z podkreśleniem podobieństwa, ale także różnicy dla innego parametru  $E_p$  charakteryzującego krzywą rozdziału. Oba te parametry mają wymiar gęstości, ale różni je materiał, z którego gęstością są z wiązane. Dla  $E$  jest to gęstość warstw, a dla  $E_p$  jest to gęstość cząstek nadawy. Zwraca się także uwagę na konieczność niejednoznacznego użycie słowa gęstość w dalszym tekście, wynikająca z nazwy rozpatrywanej zmiennej losowej, którą jest średnia gęstość warstwy łóża osadzarki. W dalszym ciągu rozważań gęstość może także oznaczać określenie funkcji opisującej rozkład prawdopodobieństwa np. funkcja rozkładu gęstości prawdopodobieństwa.

Początkowo dla łatwości wyjaśnienia przedstawianych dalej zjawisk i łatwości obliczeń przyjmujemy także, że proces rozdziału można w pierwszym przybliżeniu opisywać najprostszym ze znanych rozkładów ciągłej zmiennej losowej, to jest rozkładem jednostajnym czasem określanym także jako równomierny lub prostokątny. (Bobrowski 1980), (Kubik 1982). Szczególna przydatność tego rozkładu dla teoretycznych rozważań wynika z dokładnie sprecyzowanego zakresu rozpraszania cząstek. Taki zakres nie istnieje dla najczęściej używanego do opisu rozproszenia rozkładu normalnego, który będzie podstawowym rozkładem używanym w modelu.

Wyjaśnienie;  $f_r$  i  $F_r$  to funkcja gęstości prawdopodobieństwa i dystrybuanta rozkładu równomiernego, a  $f_n$  i  $F_n$  to funkcja gęstości prawdopodobieństwa i dystrybuanta rozkładu normalnego

Rys.1 przedstawia postać tego rozkładu oraz dla porównania rozkład normalny. Oba przedstawione rozkłady mają



Rys. 1. Gęstość prawdopodobieństwa i dystrybuanta rozkładu jednostajnego i normalnego  
Fig. 1. Probability density function and cumulate distribution of uniform and normal distributions

identyczną wartość średnią i rozproszenie  $E$ . Dla rozkładu jednostajnego  $E = \Delta/2$ , a dla rozkładu normalnego  $E = 0,6745\sigma_n$ , gdzie  $\sigma_n$  jest odchyleniem standardowym rozkładu. Teoretycznie jest możliwe, że ta miara rozproszenia zmiennej losowej może być jednakowa dla rozkładu prawdopodobieństwa jak i dla otrzymanej z takich rozkładów krzywej rozdzielu, mimo że krzywa ta nie jest dystrybuantą żadnej zmiennej losowej. Użycie w modelu rozkładu normalnego jako rozkładu podstawowego wynika z powszechności stosowania w literaturze tego rozkładu dla opisu wzbogacania w osadzarkach oraz braku dostatecznie uzasadnionych argumentów dla przyjęcia innego rozkładu. Być może istnieje postać rozkładu typu gamma lepiej modelująca rozpraszanie cząstek, lecz nie ma w literaturze wyników badań uzasadniających lepsze dopasowanie takiego rozkładu do danych empirycznych. Ponieważ funkcję gęstości prawdopodobieństwa i dystrybuantę rozkładu normalnego można z bardzo niewielkim błędem aproksymować funkcjami hiperbolicznymi możliwe jest wykorzystanie niektórych idei przedstawionych w pracy W. Zapala (Zapała 1988) jak i porównanie wyników obu prac.

Nie bez znaczenia pozostaje łatwość obliczeń dla tych rozkładów przy użyciu arkusza kalkulacyjnego jako podstawowego narzędzia używanego w następnej pracy przedstawiającej szczegóły obliczeń wykonywanych w modelu.

W dalszych rozważaniach kryterium rozróżniania poszczególnych warstw jest różnica gęstości tych warstw. Model nie definiuje zróżnicowania warstw wynikających z ich innego położenia względem sita osadzarki. To położenie w rozszerzonym modelu może być obliczane ze średniej gęstości i prędkości ruchu poszczególnych warstw.

Wszystkie stany pośrednie między już poprzednio przedstawionymi stanami krańcowymi opisują różne przypadki wzbogacania rzeczywistego. W dalszej części tych rozważań zostanie wykazane, że przyjęcia takiego samego rozkładu opisującego rozpraszanie dla wszystkich cząstek nie jest możliwe, ponieważ cząstki różnych gęstości muszą posiadać różne rozkłady opisujące rzeczywiste ich rozpraszanie, a przyczyną takiego stanu rzeczy jest istnienie skończonego zakresu gęstości cząstek wzbogaczanych ziaren i gęstości warstw, w których zachodzi zjawisko przypadkowego rozpraszania cząstek. Warto także zauważyć, że przedstawione założenia są zgodne z poprawnymi fragmentami pracy Budryka (Budryk 1949), lecz wyniki dalszych rozważań są zdecydowanie różne od jego wyników.

Rozważany dalej model łoża osadzarki powinien także wyjaśniać przyczyny istnienia obserwowanych w praktyce wzbogacania węgla odkształceń krzywych rozdzielu od ich zwykle przyjmowanych typowych postaci związanych nie tylko ze spektrum ziarnowym nadawy jak to zauważono w pracy (Jowett 1986), lecz także spowodowanych różnym rozproszeniem cząstek różnych gęstości.

### Ograniczenia możliwości rozpraszania się cząstek w warstwach łoża osadzarki

Dla rozpraszania cząstek opisanego rozkładem jednostajnym istnieje dokładnie określony zakres gęstości warstw, w których możliwe jest rozproszenie cząstek o danej ich gęstości ściśle związanej z wielkością rozproszenia  $E$  opisującego rozpraszanie się tych cząstek. Dla rozpraszania opisanego rozkładem normalnym taki zakres nie jest ściśle zdefiniowa-

ny, ponieważ funkcja gęstości prawdopodobieństwa i dystrybuanta tego rozkładu istnieją w zakresie od  $-\infty$  do  $+\infty$  i dla jego ścisłego określenia potrzebny jest wybór zakresu gęstości warstw, w którym zgodnie z przyjętą dokładnością obliczeń wartość funkcji gęstości prawdopodobieństwa jest różna od zera. Dokładność określenia zakresu rozpraszania cząstek przez rozkład jednostajny jest najistotniejszym powodem wybrania tego rozkładu do wyjaśnienia szczegółów ograniczeń rozpraszania się cząstek w warstwach łoża.

Zbliżenie się wartości oczekiwanej rozkładu jednostajnego do granicznej gęstości warstwy musi spowodować teoretyczne rozproszenie cząstek poza granicznymi warstwami. Ta sprawa wymaga bliższego wyjaśnienia, ponieważ w istniejącej literaturze jest pomijana lub niewłaściwie przedstawiana. Graniczna (najmniejsza lub największa) średnia gęstość warstwy w łożu osadzarki dla wzbogacania rzeczywistego (nieidealnego) będzie zawsze różna od granicznej gęstości cząstek wzbogaczanego materiału. Jest tak dlatego, że do warstwy granicznej muszą trafić w wyniku rozpraszania cząstki o innych gęstościach powodując zmianę jej średniej gęstości. Ta zmiana gęstości zależy od istniejącego aktualnie rozproszenia i zwiększanie rozproszenia zawsze spowoduje zwiększenie gęstości najbliższej warstwy w wyniku trafiania do niej coraz większej ilości ziaren o coraz większej ich gęstości. Istotne jest także to, że do tej warstwy nie mogą trafić nieistniejące we wzbogaczanym materiale cząstki lżejsze od granicznej gęstości cząstek. Jednakże dla poprawności rozważanego rozkładu niezbędne jest określenie funkcji gęstości prawdopodobieństwa i dystrybuanty z uwzględnieniem braku możliwości rozpraszania się cząstek w tych nieistniejących warstwach, a to musi powodować konieczność odpowiedniego skorygowania przyjętego rozkładu prawdopodobieństwa. Idea takiej korekty dla rozkładu jednostajnego jest przedstawiona na rys.2, który przedstawia zmiany w rozkładzie prawdopodobieństwa dla warstw skrajnych gęstości w stosunku do przyjętego rozkładu dla gęstości warstw ze środka zakresu ich zmienności.

Dodatkowe objaśnienie do rys. 2,4,5

$\rho_c$  i  $\rho_w$  - gęstość cząstki i warstwy,  $\rho_{cd}$  i  $\rho_{cg}$  - gęstość cząstki nadawy o najmniejszej i największej gęstości,  $\rho_d$  i  $\rho_g$  - gęstość warstwy do jakiej mogłaby trafić cząstka najmniejszej lub największej gęstości gdyby nie było ograniczenia,  $\rho_{wd}$  i  $\rho_{wg}$  - gęstość najbliższej i najcięższej warstwy,  $E$  - odchyleniu ćwiartkowe rozkładu rozproszenia cząstek w warstwach

Funkcja  $\delta$  Diraca dla przedstawianych na rys. 2 i 5 przypadków jest definiowana następująco (Niederliński 1983):

$$\begin{aligned} \delta(\rho_w - \rho_{wd}) &= 0 \text{ dla } \rho_w \neq \rho_{wd} \\ \delta(\rho_w - \rho_{wd}) &= \infty \text{ dla } \rho_w = \rho_{wd} \end{aligned}$$

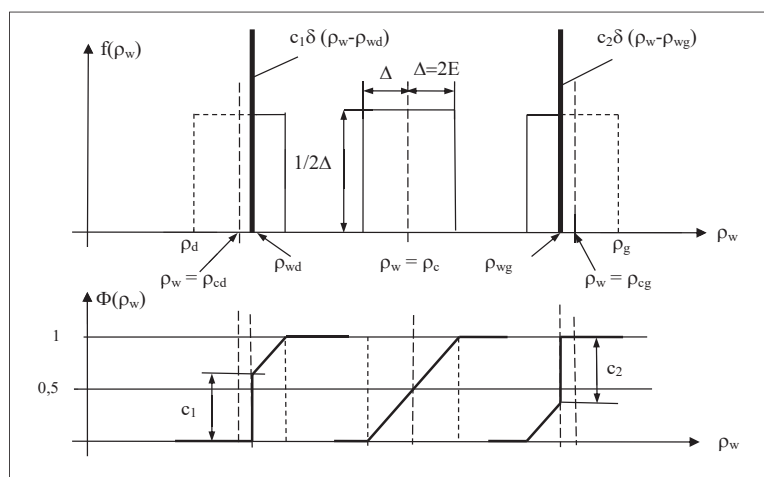
oraz

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\rho_w - \rho_{wd}) d\rho_w = 1$$

Taką definicję funkcji  $\delta$  Diraca przyjmuje się w zastosowaniach technicznych mimo braku jej matematycznej poprawności.

Wartość stałych  $c_1$  i  $c_2$  podają poniższe zależności:

$$c_1 = 0,5 + (\rho_{wd} - \rho_{cd})/4E \quad c_2 = 0,5 + (\rho_{cg} - \rho_{wg})/4E$$



Rys. 2. Gęstości prawdopodobieństwa i dystrybuanty rozkładów dla frakcji skrajnych i jednej frakcji środkowej  
 Fig. 2. Probability density functions and cumulative distributions of extreme and middle range particles densities

Wartość stałych  $c_3$  i  $c_4$  (dla rys.5) wynoszą:

$$c_3 = (\rho_{wd} - \rho_{cd})/4E \quad c_4 = (\rho_{cg} - \rho_{wg})/4E$$

Gdyby nie było ograniczeń dla istnienia warstw cząstki o najmniejszej gęstości  $\rho_{cd}$  rozproszyłyby się równomiernie w warstwach o gęstości od  $\rho_w = \rho_{cd} - \Delta$  do  $\rho_w = \rho_{cd} + \Delta$ , a ponieważ nie istnieją warstwy z zakresu  $\rho_{cd} - \Delta$  do  $\rho_{wd}$  to cząstki o gęstości  $\rho_{cd}$  nie mogą do nich trafić. Przyjmuje się, że cząstki te z takim samym prawdopodobieństwem, z jakim trafiłyby do nieistniejących warstw trafią do najbliższej warstwy, do jakiej mogą trafić. Jest to warstwa o minimalnej gęstości  $\rho_{wd}$ . Przyjmuje się także, że możliwość trafienia cząstek o gęstości  $\rho_{cd}$  do warstw cięższych od  $\rho_{wd}$  pozostaje taka sama jak sytuacji, gdyby istniały warstwy o gęstości mniejszej od  $\rho_{wd}$ . Dla cząstek nadawy o największej gęstości  $\rho_{cg}$  i warstwy  $\rho_{wg}$  o największej gęstości zachodzi zmiana rozkładu podobna jak dla najmniejszych gęstości cząstek i warstw. Taka sytuacja przedstawiona na rys.2 prowadzi do konieczności zastosowania rozkładu w rachunku prawdopodobieństwa określanego rozkładem zmiennej losowej mieszanej (Bobrowski 1980) lub rozkładem skokowo-ciągłym (Kubik 1982). Funkcja gęstości prawdopodobieństwa takiego rozkładu składa się z funkcji ciągłej dla  $\rho_w > \rho_{wd}$  oraz iloczynu pewnej stałej  $c_1$  i funkcji osobliwej, jaką jest funkcja  $\delta$  Diraca dla  $\rho_w = \rho_{wd}$ . Dystrybuanta tego rozkładu jest funkcją skokową dla  $\rho_w = \rho_{wd}$  i funkcją ciągłą poza tym punktem.

Ogólny przebieg zmian w rozkładzie normalnym wynikających z przedstawionej wyżej korekty jest przedstawiony w pracy (Głowiak 2019).

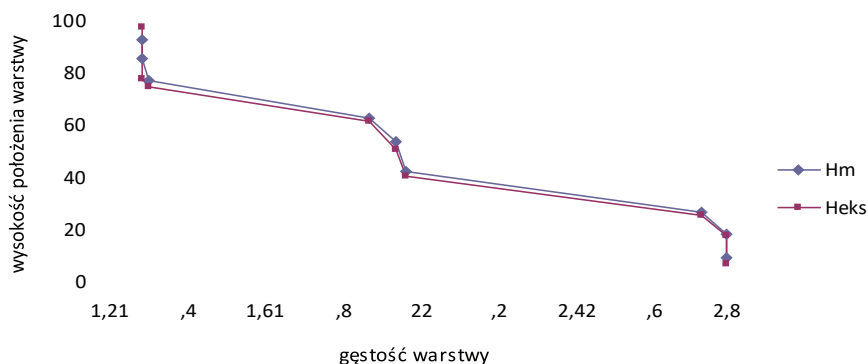
W tym miejscu konieczne jest zauważenie, że rozkład mieszany zdecydowanie różni się od rozkładu uciętego szczególnie w punktach  $\rho_{wd}$  lub  $\rho_{wg}$ , co pokazują rys. 4 i 5. Ta różnica jest wyraźnie widoczna dla wartości dystrybuanty w tych punktach. Powodem podkreślenia różnicy między tymi rozkładami jest praktyka częstego stosowania w przeróbce surowców mineralnych rozkładów uciętych. (Tumidajski 1993). Taki rozkład jest alternatywnym możliwym rozwiązaniem dla rozpatrywanego zagadnienia. Dlatego w tym miejscu konieczne jest szczegółowe uzasadnienie dla wyboru rozkładu mieszanego.

Istotna różnica między rozkładami polega na tym, że użycie rozkładów uciętych usuwa warstwy, do których z powodu ograniczenia zakresu gęstości warstw cząstki nie mogą trafić zmieniając odpowiednio prawdopodobieństwo trafienia do wszystkich pozostałych warstw, a rozkład mieszany zmienia tylko prawdopodobieństwo trafienia cząstek do warstw o najmniejszej i największej gęstości. Wybór właściwego rozkładu dla dalszych rozważań powinien być dokonany na podstawie badań empirycznych. Takie badania o minimalnym potrzebnym zakresie zostały wykonane w osadzarce laboratoryjnej i ich wyniki są uzasadnieniem dla stosowania rozkładu mieszanego. Bez wnikania w zbędne na tym etapie rozważań szczegóły eksperyment potwierdził bardzo dobrą zbieżność doświadczalnego rozkładu gęstości warstw w łożu osadzarki oznaczonego na rys.3 jako Heks i rozkładu teoretycznego Hm obliczonego z zastosowaniem rozkładu mieszanego.

Za odrzuceniem zastosowania rozkładów uciętych przemawiają także poniższe względy:

- rozkład ucięty jest modelem zjawiska, w którym populacja o znanym rozkładzie w wyniku zastosowania dodatkowych kryteriów ( np. odrzucenie części wyprodukowanych elementów przez kontrolę jakości) zostaje ograniczona do określonej jej części (Bobrowski 1980). W rozważanym przypadku zachodzi odrzucenie niektórych warstw, lecz nie następuje żadne ograniczenie populacji czyli ilości rozpraszanej w warstwach frakcji gęstościowej cząstek nadawy.

- z fizycznej interpretacji rozkładu uciętego dla rozważanego zagadnienia wynika, że cząstki nie mogące trafić do warstw, których nie ma, muszą odpowiednio zmienić swoje rozproszenie w warstwach istniejących. Trudno jest wskazać fizyczne przyczyny, które miałyby spowodować, że cząstki nie mogące trafić do nie istniejących warstw rozpraszają się zgodnie z rozkładem uciętym. Ponadto oznacza to, że ograniczenie w rozkładzie uciętym zmienia rozkład także dla cząstek, które nie podlegają ograniczeniom. Skutkiem tej zmiany jest także fizycznie nieuzasadniona zmiana wartości oczekiwanej rozkładu o  $\Delta_0$  (Rys. 4). Z przyjętych założeń wynika, że wartością oczekiwaną rozkładu powinna być niezależna od postaci przyjętego rozkładu gęstość cząstek rozpraszanej frakcji nadawy. Alternatywny rozkład mieszany nie zmienia rozproszenia cząstek wewnątrz przyjętych ograniczeń, kieru-



Rys. 3. Teoretyczny i doświadczalny rozkład gęstości warstw w łożu osadzarki  
 Fig. 3. Theoretical and empirical distribution of density layers in jig bed

jąc cząstki podlegające ograniczeniu do warstw o skrajnych gęstościach.

– stosowany do modelowania zjawiska fizycznego rozkład prawdopodobieństwa powinien prawidłowo oddawać cechy tego zjawiska oraz mieć odpowiednią i w miarę możliwości prostą interpretację fizyczną. To kryterium jest zdecydowanie lepiej jest spełnione przez rozkład mieszany niż przez rozkład ucięty.

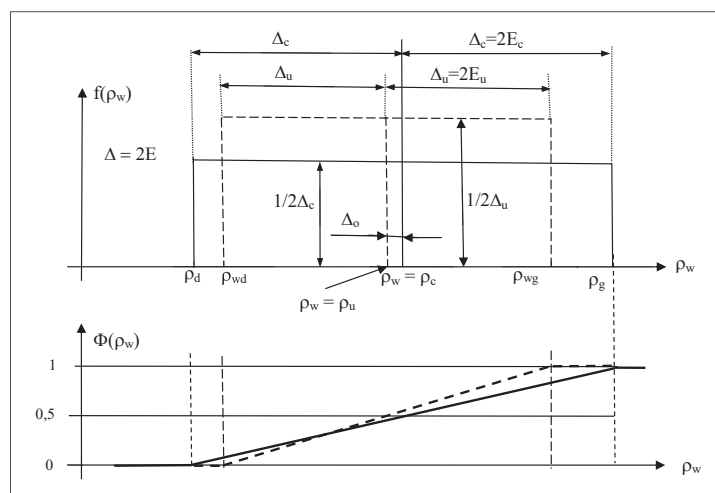
Na rys. 4 przedstawiono zamiany jakie zachodzą dla asymetrycznego ucięcia rozkładu jednostajnego. W tym przypadku szczególnie wyraźnie widoczna jest zmiana wartości oczekiwanej rozkładu o wartość  $\Delta_0$  w wyniku jego ucięcia. Indeksy  $c$  i  $u$  oznaczają te same parametry rozkładu pełnego i po ucięciu. Porównanie rys. 4 i 5 pozwala zauważyć, że dla rozkładu mieszanego nie ma zmiany jego wartości oczekiwanej. Przedstawiana na obu tych rysunkach sytuacja dotyczy dużego rozpraszania cząstek jednej frakcji nadawy poza granice istniejących warstw.

Rys. 5 przedstawia funkcję gęstości prawdopodobieństwa i dystrybuantę rozkładu jednostajnego dla bardzo dużego rozpraszania przekraczającego zakres gęstości cząstek występujących w nadawie. Jest to sytuacja często spotykana w praktyce wzbogacania węgla w osadzarkach. Gęstość warstwy jest wtedy głównie kształtowana przez rozproszenie cząstek materiału o różnych gęstościach trafiających do tej warstwy, co powoduje, że teoretycznie jest możliwa sytuacja, kiedy w warstwie nie istnieją cząstki niektórych gęstości, ponieważ nie ma ich we wzbogacanym materiale. W przypadku ich istnienia stanowiłyby one wyraźnie widoczną liczbę cząstek danej warstwy. Tej sytuacji nie można pominąć, ponieważ konstruowany model powinien także poprawnie opisywać wzbogacanie materiału składającego się w krańcowej sytuacji tylko z dwu różnych frakcji gęstościowych. Podane skutki działania ograniczeń rozpraszania cząstek dla rozkładu równomiernego są takie same dla rozkładu normalnego z tym, że dla tego rozkładu konieczne jest przyjęcie ściśle określonej granicy rozpraszania dla prowadzonych obliczeń ustalonej jako wartość średnia rozkładu  $\pm k\sigma$ , gdzie  $k$  jest tak dobrane, aby przyjęty zakres rozpraszania dla cząstek objął wszystkie warstwy do których mogą trafić cząstki zgodnie z przyjętym rozkładem, w tym także te, których istnienie wykluczają przyjęte ograniczenia. Dobranie odpowiednio dużego  $k$  jest szczególnie istotne dla bilansu masy rozpraszanych cząstek, który musi być bezwzględnie zachowany, aby wyniki

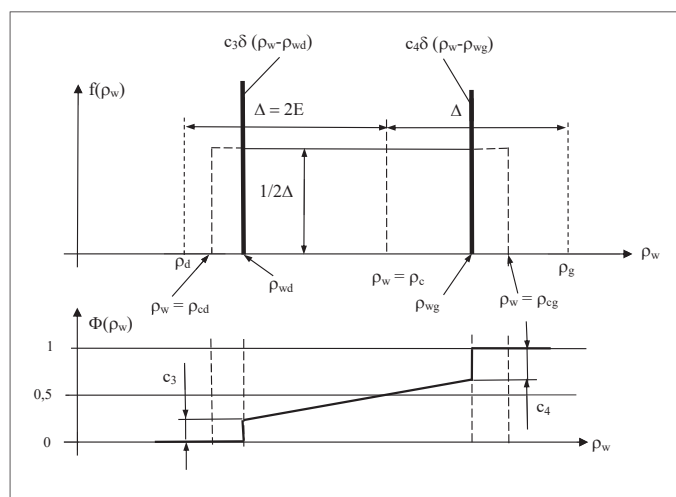
obliczeń w modelu odpowiadały wynikom w rzeczywistym wzbogacaniu. Z przedstawionych założeń wynika pewien teoretyczny paradoks polegający na tym, że dla dwu krańcowo odmiennych stanów działania osadzarki to jest wzbogacania idealnego i całkowitym ustaniem wzbogacania mamy do czynienia z rzeczywistym zerowym rozproszeniem cząstek. Wyjaśnienie tego paradoksu staje się możliwe, gdy rozróżnia się rozproszenie potencjalne wynikające tylko z postaci zastosowanego dla jego opisu rozkładu prawdopodobieństwa i rozproszenie rzeczywiste obejmujące także wszystkie ograniczenia możliwości rozpraszania się poszczególnych cząstek. Dla wzbogacania idealnego rzeczywiste i potencjalne rozproszenia jest zerowe. Dla braku wzbogacania mamy nieskończenie wielkie rozproszenie potencjalne i równocześnie zerowe rozproszenie rzeczywiste wynikające z braku możliwości rozproszenia się cząstek w nieistniejących warstwach. W tej pracy poza powyższym akapitem rozproszenie rozumiane jest jako rozproszenie potencjalne. Ogólnie można przyjąć, że dla niskich rozprożeń o rzeczywistym rozproszeniu decyduje tylko rozproszenie potencjalne, a dla dużych rozprożeń potencjalnych o faktycznie małym rzeczywistym rozproszeniu decydują ograniczenia zakresu powstałych warstw. Sprawa ta nie została do tej pory zauważona, ponieważ teoretycznie nie rozważano rozpraszania się cząstek i gęstości istniejących warstw dla dużych rozprożeń najczęściej będących skutkiem bardzo małego rozluźnienia łoża osadzarki. Z powyższego wyraźnie widoczne jest znaczenie ograniczenia zakresu gęstości istniejących warstw.

#### Wybór gęstości warstwy przyjętej jako współrzędna modelu i skutki tego wyboru

W istniejącej literaturze używane jest pojęcie gęstość warstwy lecz często bez dokładnego wyjaśnienia, co ono oznacza. Najczęściej jest ono rozumiane jako średnia gęstość warstwy, lecz może także oznaczać średnią gęstość cząstek tworzących daną warstwę. Na użytek tych rozważań średnia gęstość warstwy nie może być brana pod uwagę, ponieważ ta gęstość zależy także od porowatość fazy stałej pomijanej w tym modelu. Pozostaje zatem przyjęcie jako współrzędnej modelu średniej gęstości cząstek tworzących daną warstwę. Trafienie do warstwy o ustalonej średniej gęstości cząstki o takiej samej gęstości, lecz do tej chwili nieistniejącej w warstwie nie zmieni średniej gęstości cząstek tej warstwy. Trafienie do tej warstwy cząstki o każdej innej gęstości musi



Rys. 4. Gęstość prawdopodobieństwa i dystrybuanta rozkładu jednostajnego pełnego i uciętego  
 Fig. 4. Probability density functions and cumulative distributions of full and truncate uniform distributions



Rys. 5. Gęstość prawdopodobieństwa i dystrybuanta rozkładu mieszanego przy dużym rozproszeniu  
 Fig. 5. Probability density functions and cumulative distributions of mixed distribution probability for large grains dispersion

spowodować zmianę średniej gęstości cząstek warstwy. Jest tak dlatego, że średnia gęstość cząstek każdej warstwy jest funkcją zawartości poszczególnych frakcji gęstościowych nadawy i prawdopodobieństwa trafienia poszczególnych cząstek do ustalonych warstw. Aby ta średnia była równa z góry ustalonej wartości to wartości oczekiwane wszystkich rozkładów prawdopodobieństwa muszą być odpowiednio dobrane, a to jest sprzeczne z przyjętym założeniem o wartości oczekiwanej rozkładu równej gęstości rozpraszanych cząstek. Zatem dla dowolnego składu gęstościowego nadawy dla opisu składu tworzących się warstw o zróżnicowanej gęstości konieczny jest wybór między przyjętym rozkładem prawdopodobieństwa i a priori ustaloną średnią gęstością cząstek warstwy. Dla potrzeb prezentowanego modelu jedynie możliwe jest przyjęcie ustalonego rozkładu prawdopodobieństwa, co oznacza, że mogą nie istnieć warstwy o z góry ustalonej gęstości, lecz tylko warstwy o takich gęstościach jakie wynikają ze składu wzbogacanego materiału i przyjętego rozkładu prawdopodobieństwa. W takiej sytuacji model pozwala na przedstawienie wszystkich wynikających z niego zależności

w funkcji obliczonych średnich gęstości tych warstw. Aby to obliczenie było możliwe konieczne jest przyjęcie początkowych średnich gęstości poszczególnych warstw. Przyjmuje się, że te początkowe gęstości warstw są takie jakie istniałyby przy idealnym wzbogacaniu, a to jest równoważne przyjęciu jako gęstości warstw gęstości poszczególnych klas gęstościowych wzbogacanego materiału. Dlatego w rozważanym modelu na każdym etapie obliczeń muszą istnieć dwie różne średnie gęstości każdej warstwy; gęstość początkowa i gęstość obliczona w danym kroku obliczeń. Ta właściwość modelu będzie wykorzystywana do iteracyjnego obliczania gęstości tworzących się warstw. Konieczność stosowania obliczeń iteracyjnych wynika ze zmiany średniej gęstości wszystkich warstw łoża osadzarki w kolejnych krokach, co powoduje, że prawdopodobieństwo trafienia cząstek do danej warstwy ulega zmianie w każdym kroku obliczeń. Stosując takie obliczanie zauważyć można, że kolejne różnice między wektorem gęstością początkowych i wektorem gęstości obliczonych najczęściej maleją w kolejnych krokach obliczeń aż do pewnego kroku, od którego zaczynają rosnąć. Kryterium

zatrzymania iteracji jest wzrost sumy ważonych kwadratów różnic gęstości poprzedniej i obliczonej lub pomijalnie małe wartości obliczanej różnicy lub pojawienie się w obliczeniach niemożliwych (np. ujemnych) gęstości warstw. Wagami kwadratów różnic są masy cząstek zgromadzonych w poszczególnych warstwach. Taki wybór wag zapewnia odpowiednio duży wpływ na wynik obliczeń warstw gromadzących znaczne ilości wzbogacanego materiału

### **Graniczne gęstości warstw**

Dla dyskretnego modelu warstw łóża osadzarki zapewniającego swobodne tworzenie się gęstościowo zróżnicowanych warstw niezbędne jest przyjęcie granicznych gęstości poszczególnych warstw. Konieczność precyzyjnego określenia tych granic wynika z idei tworzonego modelu oraz z przyjętego sposobu obliczania średniej gęstości poszczególnych warstw i dlatego w tym miejscu jedynie zaznacza się istnienie tego zagadnienia, a jego szczegóły zostaną przedstawione w następnym opracowaniu podającym dokładnie realizację wszystkich obliczeń w przedstawianym modelu.

### **Zależność rozpraszania cząstek od ich gęstości**

W teorii i praktyce wzbogacania węgla zauważana jest zależność rozpraszania cząstek o stałej gęstości od wielkości tych cząstek i ich kształtu (Surowiak 2006), natomiast prawie pomijana lub marginalizowana jest zależność tegoż rozproszenia od gęstości cząstek. Jedyną pracą w literaturze znanej autorowi niniejszego opracowania, oprócz znacznie późniejszych prac związanych z modelowaniem DEM i wyżej wymienioną pracą, zwracającą uwagę na to zagadnienie jest praca Zapały (Zapała 1988). Pomijanie zależności rozproszenia od gęstości cząstki zostało w praktyce niechętnie ugruntowane przez teorię krzywych rozdziału. Zauważa się w niej różne odchylenia empirycznej krzywej rozdziału od przyjmowanej krzywej modelowej, lecz nie łączy się tego zagadnienia z gęstością rozpraszanej cząstki, lecz z gęstością rozdziału. Jednocześnie wszystkie znane prace związane z analizą ruchu pojedynczych cząstek w łóżu osadzarki od Rittingera (Stępiński 1964) począwszy bezpośrednio wiażą prędkość lub przyspieszenie cząstki z jej masą, co jest nieuchronną konsekwencją istnienia praw dynamiki. Dla stałej objętości cząstki oznacza to jako dalszy skutek zależność rozproszenia od gęstości tej cząstki. Jest tak dlatego, że stały pod względem wielkości strumień wody przepływającej przez łóżo osadzarki ziarna musi powodować istnienie zależności rozluźnienia łóża od gęstości cząstek, wynikającej bezpośrednio z amplitudy ruchu cząstek o zróżnicowanej gęstości. Rezultatem takiego działania strumienia wody jest mniejsze rozluźnienie cząstek o dużej gęstości ułożonych w dolnych warstwach i wyraźnie większe rozluźnienie lekkich cząstek w warstwach górnych. Zatem w modelu, którego założenia są rozpatrywane w niniejszej pracy konieczne jest uwzględnienie takiej sytuacji, gdy poszczególne frakcje gęstościowe wzbogacanego materiału nie rozpraszają się jednakowo. Dlatego przyjmuje się jako ważne założenie modelu możliwość wybrania rozproszenia indywidualnie dla każdej frakcji gęstościowej nadawy lub przyjęcia z góry ustalonej funkcyjnej zależności rozproszenia od gęstości frakcji gęstościowych nadawy.

### **Dwuwymiarowy rozkład cząstek w łóżu osadzarki**

Łóżo osadzarki można traktować jako losowy ciągły lub dyskretny zbiór cząstek i warstw, do których te cząstki trafiają. Zasadniczym celem tworzenia modelu, którego założenia są rozważane w tej pracy jest obliczenie średnich gęstości warstw, jakie utworzą się w łóżu i ich składu densymetrycznego. Do tego konieczna jest znajomość charakterystyki gęstościowej wzbogacanego materiału oraz przyjęcie z góry określonego rozkładu opisującego rozpraszanie się tych cząstek w poszczególnych warstwach. Dla realizacji takich obliczeń naturalne będzie przyjęcie dwuwymiarowego rozkładu, którego zmiennymi losowymi są gęstość cząstki i gęstość warstwy dla rozkładu ciągłego lub odpowiednio średnie gęstości ziaren danej klasy gęstościowej nadawy i średnie gęstości warstwy łóża dla rozkładu dyskretnego. Rzeczywista objętość właściwa danej warstwy jest średnią ważoną objętości właściwych tworzących ją cząstek, a wagami w obliczaniu tej średniej są masowe udziały cząstek danych gęstości w warstwie. W takiej sytuacji rzeczywista gęstość warstwy musi być funkcją rozproszenia cząstek o znanych gęstościach w poszczególnych warstwach łóża osadzarki i także funkcją masy cząstek danej frakcji gęstościowej nadawy, która została rozproszona w warstwach czyli funkcją składu densymetrycznego wzbogacanego materiału.

### **Rozkłady związane z rozkładem dwuwymiarowym**

Dla dwuwymiarowego rozkładu losowego oprócz dwuwymiarowej funkcji gęstości prawdopodobieństwa i dwuwymiarowej dystrybuanty określone są jeszcze jednowymiarowe rozkłady brzegowe i rozkłady warunkowe (Goldberger 1972). Dla rozkładu opisanego ciągłymi funkcjami ilość rozkładów warunkowych jest nieskończona, a w przypadku opisu dyskretnego ich ilość jest określona ilością różniących się gęstością frakcji gęstościowych nadawy i ilością rozpatrywanych warstw łóża. Rozkłady te powinny być istotną częścią modelu, ponieważ właśnie w nich jest zawarta interesująca fizyczna interpretacja zjawisk losowych istniejących w procesie osadzania.

### **Uzasadnienie braku możliwości dokładnego empirycznego sprawdzenia modelu**

Dokładne empiryczne sprawdzenie modelu wymaga podziału rozwarstwowanego w osadzarkę laboratoryjnej łóża na względnie dużą liczbę (16-48) warstw przy ustalonej wysokości sumy wszystkich warstw. Zasadniczą trudnością tego sprawdzenia są ziarna, które z powodu swoich rozmiarów mieszczą się w większej liczbie warstw. Zatem, aby z dostateczną dokładnością określić zawartość frakcji gęstościowych w poszczególnych warstwach z zachowaniem warunków odpowiadających rzeczywistości wzbogacaniu rozmiar ziaren musiałyby być dostatecznie małe. Dla utrzymania podobieństwa wzbogacania w osadzarkę laboratoryjnej i w osadzarkę przemysłowej powinno być utrzymane geometryczne podobieństwo wymiarów otworów sита i wymiarów cząstek. Wymaga to bardzo małych otworów w sicie osadzarki laboratoryjnej, a to z powodów konstrukcyjnych prowadzi do konieczności stosowaniu w niej sита o bardzo małym współczynniku przeswitu. Mały przeswit jest istotnym powodem braku podobieństwa wzbogacania w osadzarkę laboratoryjnej i rzeczywistym procesie. Brak podobieństwa wynika z ograniczenia przepły-



wu wody przez sito i wzbogacany materiał prowadzącego do zbyt małego rozluźnienia spowodowanego dużym spadkiem ciśnienia wody na samym sicie. Empiryczne określenie rozkładu cząstek o stałej gęstości w poszczególnych warstwach jest konieczne, ponieważ porównanie krzywych rozdziału generowanych przez model z krzywymi empirycznymi nie może jednoznacznie określić przyczyny istnienia różnic między tymi krzywymi. Wynika to z możliwości istnienia różnic spowodowanych zależnością rozproszenia od gęstości cząstek lub zmianą asymetrii rzeczywistego rozkładu. Z wstępnego porównania krzywych rozdziału generowanych przez modele z użyciem rozkładu równomiernego i rozkładu normalnego wynika, że kształt krzywej rozdziału jest związany z rodzajem rozkładu opisującego rozpraszanie się cząstek w warstwach. W przypadku, gdy rozkłady nie są jednakowe dla gęstości wszystkich cząstek nadawy i ich rozproszenie rośnie wraz z gęstością cząstek powstają zjawiska podobne jak w rzeczywistym wzbogacaniu polegające na zmniejszaniu się nachylenia krzywej rozdziału dla większych gęstości dające efekt asymetrii krzywej rozdziału. Jeżeli rozkłady są asymetryczne to krzywe rozdziału także muszą być asymetryczne. Rodzi to istotną trudność rozróżnienia przyczyn asymetrii krzywych rozdziału, bowiem dla eksperymentalnej asymetrycznej krzywej nie można jednoznacznie określić przyczyny jej asymetrii. Może to być rzeczywista asymetria rozkładów opisujących rozpraszanie się cząstek lub sytuacja, gdy poszczególne rozkłady są symetryczne, lecz każdy z nich o innym rozproszeniu. Możliwe jest jednak mniej dokładne pośrednie sprawdzenie modelu przez porównanie eksperymentalnego pomiaru rozkładu gęstości warstw w pionowym przekroju łóża z takimi rozkładami generowanym przez model dla takiego samego składu gęstościowego wzbogacanego materiału i różnych modelowanych rozprośnień. Taka metoda wspomniana już przy rozważaniach dotyczących rozkładów uciętych i pokazana na rys. 3 zostanie zastosowana do weryfikacji poprawności działania przedstawianego modelu. Sposób weryfikacji modelu i jej wyniki będą przedmiotem odrębnego opracowania.

#### **Realizacja obliczeń w modelu**

Dla realizowanego przez model iteracyjnego algorytmu obliczeń konieczne jest by model ten opierał się na obliczeniach możliwie najdokładniejszych, a to wymaga zastosowa-

nia w obliczeniach dystrybuant poszczególnych rozkładów. Obliczenia realizowane na podstawie przyjętych funkcji gęstości prawdopodobieństwa poszczególnych rozkładów są zbyt niedokładne ze względu na kumulowanie się błędów aproksymacji tej funkcji w obliczeniach iteracyjnych. Aproksymacja taka jest konieczna dla rozkładu normalnego ponieważ w obliczeniach niezbędne jest całkowanie, którego wynik nie jest funkcją elementarną.

Rozważany model wykorzystuje do obliczeń rozkłady związane z dwuwymiarowym rozkładem gęstości prawdopodobieństwa znalezienia cząstki o gęstości  $\rho_{ci}$  w warstwie o gęstości  $\rho_{wj}$  i dodatkowo rozkłady gęstości poszczególnych warstw i zawartości popiołu w cząstkach ulokowanych w warstwach. Jest on z założenia modelem dyskretnym, lecz ilość frakcji gęstościowych w tym modelu wynosząca 32 dla większości obliczeń jest wystarczająco duża, aby mógł być on praktycznie traktowany jako model ciągły. Dla zbadania wpływu ilości dyskretnych warstw i frakcji gęstościowych nadawy na wynik obliczeń przewiduje się zbadanie działania modeli także dla ilości frakcji gęstościowych równych 16 i 48. Porównanie wyników wykonanych wstępnych obliczeń pozwala zauważyć, że zmiana ilości frakcji gęstościowych cząstek i warstw nie zmienia zasadniczo obrazu wzbogacania w osadzarkę wynikającego z tego modelu.

#### **Podsumowanie**

Przedstawione powyżej szczegóły założeń probabilistycznego modelu rozkładu gęstości warstw łóża osadzarki nie pozwalają na wyciąganie szczegółowych wniosków o działaniu tego modelu. Wynika z nich jeden podstawowy fakt, że na etapie formułowania założeń zrobiono wszystko, co jest aktualnie możliwe, aby zapewnić istnienie w modelu tylko tych mechanizmów działania osadzarki i ich ograniczeń zgodnych z rzeczywistym jej działaniem. W następnej pracy zostaną podane wszystkie szczegóły obliczeń niezbędne dla jego poprawnego działania. Pozwoli to zauważyć istotne różnice działania tego modelu i już istniejących modeli teoretycznych oraz istnienie zjawisk w procesie osadzania, których wykrycie eksperymentalne jest bardzo trudne ze względu na niezadowolający stan techniki pomiarowej stosowanej w przeszłości i także aktualnie w badaniach procesu osadzania.

## Literatura – References

1. Bobrowski D. (1980) Probabilistyka w zastosowaniach technicznych WN-T Warszawa 1980 str.173-175, 252-253
2. Budryk W. (1949) Działanie płuczek i wialni w świetle teorii część pierwsza Przegląd Górniczy 1949 nr 9 (620) str. 880 -887
3. Cierpisz S. (2012) Automatyczna regulacja procesu wzbogacania węgla w osadzarkach. Wydawnictwo Politechniki Śląskiej Gliwice str. 13-15
4. Głowiak S. (2019) Powody konieczności korekty pewnej części teorii wzbogacania grawitacyjnego Inżynieria Mineralna Inżynieria Mineralna – Journal of the Polish Mineral engineering Society, vol 2.
5. Goldberger A.S. (1972) Teoria ekonometrii PWN Warszawa str.79-108
6. Hughes F.S. (1967) The partition curve Coal Peparation March/April 1967 p.67
7. Jinnouchi Y. Kawashima S. (1978) How to Predict and Optimize the Pulsation in the Air-Pulsated Jigs VIII International Coal Preparation Congress Donieck B5 pp.105-136
8. Jonkers A., Lyman G.J., Loveday G.K. (1998) Advances in Modelling of Stratification in Jigs XIII International Coal Preparation Congress Brisbane Vol.1, Paper G2 pp. 265-275
9. Jowett A. (1986) An Appraisal of Partition Curves for Coal-Cleaning Processes International Journal of Mineral Processing 16 str. 75-95
10. Kowol D. (2010) Wpływ zamian parametrów nadawy na efekty działania pływakowego układu sterowania odbiorem produktów osadzarki Praca doktorska Politechnika Śląska w Gliwicach Wydział Górnictwa i Geologii str. 68-81, 88-94
11. Kubik L.T Krupowicz A. (1982) Wprowadzenie do rachunku prawdopodobieństwa i jego zastosowań PWN Warszawa str.108,116-121,185,194
12. Mishra B.K., Mehrotra S.P. (2001) A jig model based on the discrete element method and its experimental validation. Int.J. of Miner. Process., 63 str. 177-189
13. Niederliński A. (1983) Systemy i sterowanie Wstęp do automatyki i cybernetyki technicznej PWN Warszawa str. 298-299
14. Srinivasan R., Mishra B.K., Mehrotra S.P. (1999) Simulation of Particle Stratification in Jigs Coal Preparation Vol. 20, pp. 55-70
15. Stępiński W. (1964) Wzbogacanie grawitacyjne PWN Łódź-Warszawa-Kraków str. 226
16. Surowiak A. (2006) Wpływ rozkładu właściwości fizycznych i geometrycznych ziaren na dokładność rozdzielania w osadzarkach przykładzie węgla. Rozprawa doktorska AGH, Wydział Górnictwa i Geoinżynierii Kraków str. 107-143
17. Tumidajski T. (1993) Zastosowanie metod statystycznych w analizie procesów przeróbki surowców mineralnych Śląskie Wydawnictwo Techniczne Katowice str. 38-40
18. Woolcott L.C., Bwalya M., Mabokela L. (2015) A validation study of the King stratification model Journal of the Southern African Institute of Mining and Metallurgy Volume 115 February pp.95-101
19. Zapała W. (1988) Opracowanie i cyfrowe badania symulacyjne algorytmów sterowania procesu wzbogacania węgla z wykorzystaniem pomiaru rozkładu frakcji densymetrycznych w łożu osadzarki Praca doktorska. Politechnika Śląska, Instytut Elektryfikacji i Automatykacji Górnictwa Gliwice str. 48-68

### *Assumptions of Probabilistic Model of Grains Density Distribution in Jig Bed Layers*

*Significant limits of grain dispersion in layers of the jig bed and the consequences of these limits are shown in the presented paper. They are the results of large grains dispersion in relatively small range of jig bed density layers. These limits are omitted or incorrectly presented in the descriptions of the phenomena occurring in the jig operation in most of existing papers. Correct conditions and assumptions of probabilistic model of these phenomena are presented. The construction of this probabilistic model does not have any restrictions for proper creation of the density layers of jig bed and amount of mass distributed in these layers. The experimental validation of this model in the laboratory conditions is possible in particular situation. Additionally this model explains some errors existing in gravitational beneficiation theory.*

*Keywords: hard coal beneficiation, jig, modeling of the jig operation, partition curve, grains dispersion*