



# Powody konieczności korekty pewnej części teorii wzbogacania grawitacyjnego

Stanisław GŁOWIAK

<http://doi.org/10.29227/IM-2019-01-38>

Submission date: 11-07-2018 | Review date: 02-04-2019

## Abstract

*W pracy przedstawiono ogólny zarys wybranych problemów opisu procesu wzbogacania węgla w osadzarce, jakie rysują się na podstawie aktualnego stanu ważniejszych prac teoretycznych związanych z krzywymi rozdziału i rozpraszaniem się cząstek w procesie osadzania. W dalszej części szczegółowej krytycznej analizie poddano fragmenty tych powszechnie akceptowanych bez zastrzeżeń prac, które w niewłaściwym świetle przedstawiają teoretyczne wyjaśnienie zachodzącego w osadzarce rozpraszania się cząstek wzbogacanego materiału. Szczególną uwagę zwrócono na pomijane do tej pory w pracach teoretycznych ograniczenia możliwości rozpraszania cząstek i tworzenia się gęstościowo zróżnicowanych warstw oraz skutki tego pominięcia dla opisu zjawisk zachodzących w procesie osadzania i oceny tego procesu.*

*Słowa kluczowe: wzbogacanie węgla, osadzarka, krzywa rozdziału, rozproszenie cząstek*

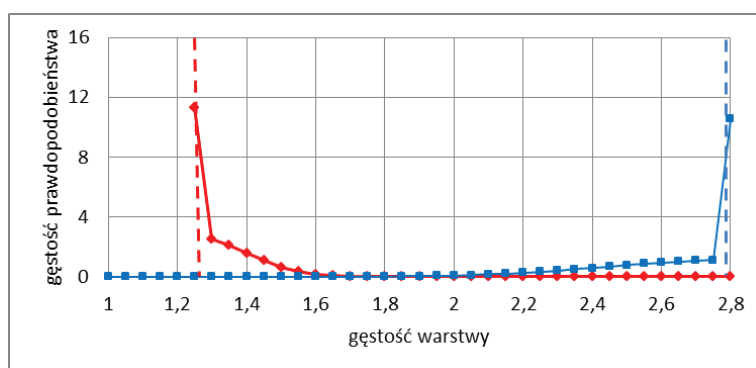
## Wstęp

W ciągu ostatnich pięćdziesięciu lat nie pojawiła się żadna praca zmieniająca ugruntowany od dawna stan teorii wzbogacania grawitacyjnego kopaliny. Na tej podstawie można sądzić, że ta teoria w swym podstawowym zarysie jest kompletna i jej dalszy rozwój nie jest potrzebny. Jednakże z całą pewnością istotne jest pytanie czy wszystko, co obecnie znamy z tej teorii jest poprawnie sformułowane. W opinii autora tej pracy pewnej i znacznej korekty wymaga część teorii opisującej krzywą rozdziału i interpretacja tej krzywej związana z oceną jakości wzbogacania w wodnych osadzarkach pulsacyjnych. Podstawą do takiej opinii jest zauważenie, że przedstawiane w pewnej części literatury opisy zjawisk zachodzących w osadzarce i ich uogólnienia zbyt daleko odbiegają od rzeczywistego działania osadzarki i do tej pory nie doczekały się odpowiedniej korekty. Sprostowanie tych nieprawidłowych opisów zachodzących w osadzarce zjawisk i ich teoretycznych uzasadnień jest ważne także dlatego, że większość z nich nadal istnieje w do dziś używanych podręcznikach grawitacyjnego wzbogacania kopaliny. Znaczna część niepoprawnie sformułowanych teoretycznych zależności pochodzi z opracowań autorów powszechnie uznawanych jako niekwestionowane autorytety przeróbki kopaliny. Z tego względu w związku z zakończoną niepowodzeniem próbą znalezienia w istniejącej literaturze jakichkolwiek śladów krytyki i chęci poprawienia tych błędów autor tego opracowania z konieczności czuje się zobowiązany do przedstawienia szczegółów niepoprawnych sformułowań uważając, że w tej sytuacji brak krytycznej reakcji przynosi tylko dalsze szkody. Niniejsza praca w swoim zamiarze jest zbiorową erratą do kilku istotnych dla teorii wzbogacania publikacji mającą za interesowanym poznaniem tych zagadnień ułatwić przebicie się przez myślowe meandry twórców tych publikacji. W opinii autora krytyczne uwagi zamieszczone poniżej powinny być się znaleźć przed wielu laty w opiniach recenzentów lub w tych licznych pracach, których autorzy podali je jako literaturowe źródła swoich dokonań.

## Ogólny zarys zagadnienia

Początek powstania teorii krzywych rozdziału wiąże się z opublikowaniem przez K.W. Trompa w lutym 1937 pracy (Tromp, 1937), w której wprowadzono pojęcia liczby i krzywej rozdziału. Oba te pojęcia mają zasadnicze znaczenie dla teorii wzbogacania grawitacyjnego. Znaczenie to wynika z możliwości oceny procesu wzbogacania bez odwoływania się do jakościowo-ilościowej oceny produktów wzbogacania. Tę możliwość stwarza wprowadzenie pośredniej oceny dotyczącej najistotniejszej części procesu, jaką jest rozdzielanie materiału surowego na dwa produkty wzbogacania według gęstości cząstek. Podobieństwo empirycznych krzywych rozdziału do dystrybuanty rozkładu normalnego zwróciło uwagę A. Terry (Terra, 1938) na losowy charakter procesu wzbogacania, co zaowocowało wprowadzeniem wskaźnika oceny procesu określanego jako rozproszenie prawdopodobne Ep. Wskaźnik taki znany już był wcześniej w rachunku prawdopodobieństwa jako miara rozrzutu rozkładu pod nazwą odchylenia ćwiartkowego (Kubik, 1982). W połowie ubiegłego stulecia został wprowadzony, zupełnie niepotrzebnie zdaniem autora tej pracy, inny wskaźnik oceny procesu wzbogacania ściśle związany z rozproszeniem prawdopodobnym i nazwany imperfekcją (Belugou, 1950).

Widoczne podobieństwo empirycznych krzywych rozdziału dla odpadów do dystrybuanty rozkładu normalnego prawdopodobnie spowodowało powstanie niewłaściwej interpretacji losowego charakteru procesu wzbogacania powszechnie stosowanej także dzisiaj. Na tej interpretacji opierają się niemal wszystkie znane prace z tego zakresu z wyjątkiem pracy (Zapała 1988), której część zawierająca początki właściwej interpretacji nie została w całości opublikowana. Generalnie niewłaściwość interpretacji sprowadza się do nieuzasadnionego uogólnienia bez wątpliwości losowego charakteru zjawiska trafiania pojedynczych ziaren do danego produktu procesu wzbogacania na całościowe pojmowanie procesu wzbogacania grawitacyjnego jako procesu losowego. Objawem tej interpretacji jest rozumienie krzywej roz-



Rys. 1. Ograniczone rozpraszanie cząstek o skrajnych gęstościach

Fig. 1. Limited dispersion of grains of extreme densities

działu jako całkowitej transformaty funkcji (krzywej) rozproszenia (Budryk, 1949), (Stępiński, 1964), (Nawrocki, 1975), (Surowiak, 2006), która jest podobna do funkcji gęstości prawdopodobieństwa tego rozkładu. Widocznym skutkiem tego błędu jest losowa interpretacja procesów o charakterze deterministycznym zawierających pewną składową losową, czego uzasadnieniem może być stwierdzenie zawarte w pracy (Tumidajski 1993), że statystyczną naturę procesów przerobczych przyjmuje się bez zastrzeżeń. Poprawniejsze byłoby stwierdzenie, że statystyczną naturę mają właściwości wzbogacanych materiałów znacznie wpływające na przebieg tego procesu, podczas gdy sam proces wzbogacania jest ze swej istoty deterministyczny, pomimo że zawiera pewną, a w niektórych przypadkach znaczną składową losową związaną z jego techniczną realizacją. Krzywą rozdziału można także pojmować jako statyczną charakterystykę zdeterminowanego procesu wzbogacania. Użycie do jej matematycznego opisu innej funkcji o zbliżonym do dystrybuanty rozkładu normalnego kształcie jak np. tangens hiperboliczny nie sugerowałoby losowego charakteru procesu. Trzeba jednak zaznaczyć, że w pewnych szczególnych sytuacjach krzywa rozdziału i dystrybuanta rozkładu prawdopodobieństwa określającego rozproszenie cząstek wzbogacanego materiału w warstwach, jakie tworzy ten materiał w łozu osadzarki mogą mieć taki sam kształt i istnieje związek między tymi funkcjami. Ważną i zasadniczą różnicą jest natomiast to, że argumenty obu tych funkcji są różne. Podsumowaniem tych uwag może być stwierdzenie, że nachylenie krzywej rozdziału ma związek z losowym trafianiem poszczególnych cząstek do różnych warstw, spowodowanym nie losowym charakterem procesu, lecz głównie losowymi właściwościami wzbogacanego materiału. Te losowe właściwości są w znacznej części skutkiem niewłaściwego przygotowania materiału do wzbogacania zwykle spowodowanego zaniechaniem odpowiedniej klasyfikacji ziarnowej.

Trzeba jeszcze zauważyć, że osadzanie jako przemysłowy proces wzbogacania jest oceniane według nie do końca poprawnego dla tego rodzaju wzbogacania wzorca, jakim jest gęstościowe rozdzielanie wzbogacanego materiału. Dla wzbogacalników z cieczą ciężką jest to naturalny wzorzec, ponieważ wzbogacanie i jego ocena są jednolite pod względem zasady rozdziału. Osadzanie jako naturalnie zależne także od wielkości wzbogacanych ziaren i ich kształtu nie ma odpowiedniego wzorca, który pozwoliłby stwierdzić idealne rozdzielanie dla danego składu gęstościowego i ziarnowego.

Dlatego ocena osadzarki według gęstościowego rozdziału produktów, pracującej często z przekroczeniem dopuszczalnego zakresu wielkości wzbogaczanych ziaren, zawsze nie jest całkowicie obiektywna. Innym powodem, aby gęstościowej oceny rozdziału nie traktować jako ostatecznej jest to, że dla idealnego rozdziału gęstościowego ocena ilościowo-jakościowa produktów wzbogacania może być niekorzystna.

#### Podstawy poprawnego modelu rozwarstwiania się wzbogacanego materiału w łozu osadzarki

Podawany do koryta osadzarki materiał surowy w pulsującym w płaszczyźnie pionowej strumieniu wody rozdziela się na warstwy o zróżnicowanej gęstości i stopniowo przesuwa się w kierunku drugiego końca koryta. W tym końcu dolna część materiału opuszcza koryto jako produkt ciężki przez szczelinę wypustową, a pozostała część jako produkt górny wraz z wodą trafia do następnego przedziału lub opuszcza maszynę jako finalny lekki produkt wzbogacania (koncentrat węglowy). Materiał w końcowej części strefy rozwarstwiania można podzielić na pewną ilość warstw o rozróżnialnej pomiarowo gęstości. Z powodu nieidealnego rozwarstwiania każda z tych warstw składa się z ziaren o różnej gęstości i może być określona średnią gęstością ziaren tworzących tę warstwę. Poddawany wzbogacaniu materiał składa się z frakcji gęstościowych o różnym udziale w całości materiału. Zależność zawartości popiołu od udziału danej frakcji gęstościowej w nadawie jest nazywana charakterystyką częstościową nadawy (Stępiński 1964). Istnieje podobna charakterystyka nadawy, zazwyczaj nie używana w rozważaniach teoretycznych, podająca udział danej frakcji gęstościowej w funkcji jej gęstości. Charakterystyka ta w praktyce wzbogacania węgla zwykle jest wyznaczana pomiarowo w ograniczonym zakresie (dla trzech frakcji gęstościowych) dla określonej próbki nadawy i w praktyce przemysłowego wzbogacania przyjmuje się niesłusznie, że pozostaje ona stała w okresie przyjętym do kontroli jakości produktów. Wyniki pomiarów przedstawione w pracy Zapały (Zapała 1988) oraz rejestracje parametrów pracy przemysłowych osadzarek wykonane przez autora tej pracy jednoznacznie wskazują na ogromną zmienność charakterystyk nadawy i niesłuszność przedstawionego wyżej poglądu. Naturalnym skutkiem przyjmowania dużej zmienności nadawy powinno być traktowanie takiej pełnej charakterystyki częstości (dla co najmniej 8-12 frakcji gęstościowych) jako funkcję gęstości prawdopodobieństwa pewnego rozkładu. Taki rozkład jest charakterystyką wejściową wzbogacane-

go materiału dla przedstawianego modelu rozkładu gęstości ziaren w łóżu osadzarki. Pojedyncze ziarna wzbogacanego w osadzarkę materiału losowo trafiają do poszczególnych warstw łóża osadzarki. Prawdopodobieństwo trafienia ziarna frakcji gęstościowej nadawy o określonej gęstości do określonej warstwy zależy od ilości tej frakcji w nadawie, różnicy gęstości tej frakcji i średniej gęstości ziaren danej warstwy (Budryk, 1949) oraz przyjętego rodzaju rozkładu charakteryzującego rozpraszanie ziaren w warstwach łóża. Dla dalszych rozważań został przyjęty rozkład normalny. Przedstawione wyżej założenia mogą być podstawą do określenia dwuwymiarowego rozkładu podającego prawdopodobieństwo znalezienia się cząstki o określonej gęstości w warstwie, której gęstość określa średnia gęstość wszystkich cząstek tworzących tę warstwę. Postuluje się także, aby ten dwuwymiarowy rozkład uwzględniał skończony zakres gęstości cząstek i warstw oraz dowolny skład gęstościowy rozdzielanego materiału i pozwalał na pełną ocenę bilansu mas w procesie rozdzielania. Po uzupełnieniu o zależność zawartości popiołu od gęstości i prędkości warstw od ich gęstości powinien pozwalać także na ocenę produktów wzbogacania oraz obliczenie wysokości poszczególnych warstw łóża.

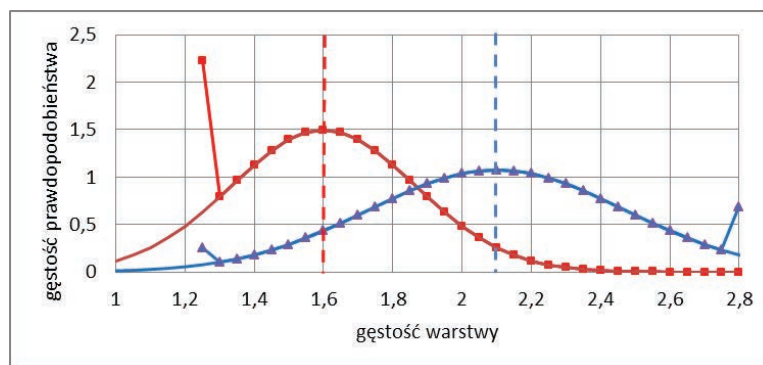
Zasadniczą trudnością w określeniu tego rozkładu jest spełnienie warunku, aby rozpraszanie cząstek wynikające z tego rozkładu miało miejsce tylko w tych warstwach, których istnienie jest uzasadnione składem gęstościowym wzbogacanego materiału. Ważny dla pokazania tej trudności jest fakt, że ograniczenie zakresu tworzących się warstw jest zależne także od przyjmowanego w modelu rozproszenia. Żaden z podawanych w literaturze teoretycznych modeli wzbogacania w osadzarkę nie ma tego rodzaju właściwości. Dlatego w tym miejscu konieczne jest podanie krótkiego opisu poprawnego modelu niezbędnego dla pokazania błędów w istniejącej literaturze. Dokładny jego opis z podaniem matematycznych szczegółów zostanie przedstawiony w oddzielnym opracowaniu. Zasadniczym celem pokazania teoretycznego rozkładu cząstek w łóżu osadzarki na tym etapie rozważań jest wyjaśnienie czym w swej istocie w losowej interpretacji procesu wzbogacania jest rozproszenie, liczba rozdziału, krzywa (funkcja) rozdziału oraz jakie relacje zachodzą między tymi pojęciami.

W rozważanym w tym miejscu zagadnieniu istotne znaczenie mają funkcje gęstości i dystrybuanty tylko niektórych rozkładów warunkowych rozkładu dwuwymiarowego, dla których warunkiem jest określona gęstość cząstki wzbogacanego materiału. Rozkłady te są dlatego szczególnie istotne, że odpowiadają rozumieniu rozproszenia podanego w dalszej części niniejszej pracy wzorem (1) oraz niektórym pojęciom używanym w teorii wzbogacania. Konieczne jest także zauważenie, że jeżeli istniejące w literaturze rozkłady opisujące rozpraszanie się cząstek przyjmują jakieś ograniczenia, to są one związane tylko z zakresem gęstości cząstek pomijając istniejące naturalne granice dla rozpraszania się tych cząstek. Tymi naturalnymi granicami są warstwy o najniższej i najwyższej gęstości średniej. Jest oczywiste, że cząstki wzbogacanego materiału nie mogą rozproszyć się w nie istniejących warstwach. Żaden z istniejących w literaturze wzorów określających możliwość rozproszenia się cząstek nie bierze pod uwagę tej oczywistości. Pierwszą i najistotniejszą uwagą dotyczącą ograniczeń rozpraszania się cząstek jest

zauważenie, że największe ograniczenia w możliwości rozpraszania dotyczą cząstek o najniższej i najwyższej gęstości wzbogacanego materiału. Cząstki o najmniejszej gęstości mogą z określonym prawdopodobieństwem trafić do każdej istniejącej warstwy. Najlżejsza warstwa dla wzbogacania rzeczywistego (nieidealnego) ma zawsze gęstość większą od gęstości najlżejszych cząstek, ponieważ trafiają do niej także cząstki wyższych gęstości i równocześnie nie mogą do niej trafić nie istniejące cząstki lżejsze. W tej najlżejszej warstwie muszą zatem gromadzić się wszystkie cząstki, które zgodnie z przyjętym rozkładem trafiłyby do nie istniejących warstw lżejszych. Funkcję gęstości prawdopodobieństwa takiego rozkładu, w rachunku prawdopodobieństwa określanego jako rozkład mieszany (Kubik, 1982), przedstawia rys.1.

Na tym rysunku pokazano także analogiczną funkcję rozkładu dla cząstek o największej gęstości. Funkcje gęstości prawdopodobieństwa tego rozkładu dla cząstek ze środkowego zakresu gęstości i zróżnicowanym rozproszeniu pokazane są na rys.2. Na rysunku tym liniami bez znaczników pokazane są funkcje gęstości rozkładu przekraczające zakres ograniczeń. Na obu rysunkach gęstość cząstek rozpraszanej frakcji jest zaznaczona pionową przerywaną linią. Istotne jest zauważenie, że podane wykresy nie pokazują dodatkowych zmian funkcji gęstości rozkładu prawdopodobieństwa wynikających ze zmiany gęstości warstw. Zmian tych nie można pokazać na tym etapie rozważań, ponieważ w znacznym stopniu zależą one także od składu gęstościowego nadawy nieuwzględnionego w przykładach. Ponadto rozsądnie jest przyjmować, że gęstość tworzących się swobodnie warstw będzie inna niż gęstość poszczególnych frakcji nadawy. To założenie staje się szczególnie ważne dla modeli dyskretnych. W każdym z podanych przykładowych wykresów rozproszenia cząstek w warstwach to rozproszenie jest inne.

Liczba rozdziału dla produktu lekkiego określa jaka część masy cząstek o danej gęstości zawartej w nadawie trafia do tego produktu. Z drugiej strony funkcja gęstości prawdopodobieństwa rozkładu warunkowego dla stałej gęstości cząstki podaje jakie jest prawdopodobieństwo, że cząstki o tej gęstości znajdują się w warstwie o rozpatrywanej gęstości, a dystrybuanta tego rozkładu podaje prawdopodobieństwo trafienia tych cząstek do tej warstwy i warstw lżejszych od warstwy o rozpatrywanej gęstości. Na mocy twierdzenia Bernoulliego (Kubik, 1982) dla odpowiednio dużej próbki prawdopodobieństwo to może być rozumiane jako udział masy cząstek o danej gęstości odpowiednio w masie danej warstwy lub w masie warstw o gęstości równej i mniejszej od gęstości tej warstwy. Z powyższego wynika, że wartość dystrybuanty rozkładu warunkowego dla stałej gęstości cząstek w punkcie o gęstości warstwy  $\rho_w$  jest liczbą rozdziału dla cząstki o gęstości  $\rho_c$ . Jeżeli zatem dokonać idealnego podziału rozwarstwowanego materiału na produkt lekki i ciężki obierając jako granicę konkretną warstwę to punkty dystrybuant rozkładów warunkowych o stałej gęstości cząstki są punktami krzywej rozdziału dla tak dokonanego podziału rozwarstwowanego materiału na dwa produkty. Zatem można uważać, że krzywa rozdziału jest miejscem geometrycznym punktów różnych dystrybuant tych rozkładów warunkowych, dla których ustalona jest gęstość cząstki. Poprawny model rozwarstwiania się materiału w łóżu osadzarki musi także uwzględniać w swej postaci naturalną zmienność średniej gęstości warstwy w wy-



Rys.2. Ograniczone rozproszenie cząstek o różnych gęstościach

Fig. 2. Limited dispersion of different density grains

niku zmian charakterystyki wzbogacanego materiału oraz zmian rozpraszania się cząstek w różnych warstwach dla cząstek różnych gęstości spowodowanych zmiennymi warunkami technicznymi prowadzonego procesu wzbogacania. Prowadzi to do sytuacji, w której postać modelu nie może ograniczać swobody kształtowania się gęstości poszczególnych warstw jak i ilości materiału gromadzącego się w tych warstwach. Brak tych ograniczeń powoduje, że mogą nie istnieć warstwy o niektórych zakresach gęstości. Takich założeń nie spełnia żaden z modeli przedstawianych w istniejącej literaturze poza modelami klasy DEM (Mishra 1999), które na obecnym etapie rozwoju nie są dostatecznie precyzyjne i dlatego nie mogą być użyte w prowadzonych rozważaniach. Inne modele jak model Zapały (Zapała, 1988) lub model Kinga (Cierpisz, 2012) używane dla wyjaśniania rozproszenia w procesie osadzania opisują to rozproszenie stosując z góry ustalony liniowy rozkład gęstości warstw, który ma miejsce tylko dla wzbogacania idealnego, a w rzeczywistym wzbogacaniu jest on silnie nieliniowy. Uwzględnienie możliwości tworzenia się zróżnicowanych gęstości warstw prowadzi do modelu, w którym obliczanie gęstości warstw musi być iteracyjne, ponieważ każda zamiana gęstości warstw zmienia używany do obliczeń rozkład gęstości prawdopodobieństwa.

### Krytyczna ocena niektórych podstawowych prac

Dostęp do niektórych z poniżej omawianych prac jest bardzo utrudniony głównie ze względu na wpływ czasu od ich powstania. Dlatego w dodatku do tego artykułu przedstawiono wybrane cytaty z tych prac ułatwiające Czytelnikowi własną ocenę przedstawianych argumentów.

#### Praca K.F. Trompa

Podstawową pracą dającą początek tej gałęzi teorii wzbogacania grawitacyjnego jest praca K.F. Trompa opublikowana w lutym 1937 roku (Tromp, 1937). Jej ogromne znaczenie dla teorii polega głównie na wydzieleniu z całkowitej oceny procesu wzbogacania grawitacyjnego jego najistotniejszej części i poddanie tej części oddzielnej ocenie oraz na wprowadzeniu możliwości względnie prostej oceny poszczególnych urządzeń wzbogacających. Jednakże to bardzo istotne osiągnięcie Trompa zawiera pewne braki, które nie zostały skorygowane zarówno przez autora jak i kontynuatorów jego pracy.

Przed ich przedstawieniem trzeba zauważyć równoległe używanie w literaturze pojęć ciężaru właściwego i gęstości. Sens obu pojęć jest taki sam, pomimo różnych ich fizycznych

definicji, a istniejąca w praktyce różnica wynika tylko z układu jednostek użytych do ich określenia. W dalszym ciągu pojęcia te będą używane zamiennie z zachowaniem zasady, że przy omawianiu danej pracy stosuje się pojęcie używane przez jej autora. W pracy Trompa oba te pojęcia są używane w równoległe.

Można wskazać trzy istotne niedostatki tej pracy. Pierwszy z nich to pominięcie pełnej oceny dokładności empirycznego wyznaczenia krzywej rozdziału. Problem ten pozostaje bez satysfakcjonującego rozwiązania do dnia dzisiejszego, pomimo licznych norm związanych z tym zagadnieniem (Głowiak, 1996). Można sądzić, że Tromp był świadomy wagi tej sprawy pomijając w tabeli 1 i na podanym wykresie na rys. 5 (Tromp, 1937) ostatnią z możliwych do wyznaczenia liczb rozdziału. Liczba ta, obliczona z danych Trompa, całkowicie nie pasuje do trendu wyznaczonego przez liczby dla niższych ciężarów właściwych i ponadto zawiera sama w sobie problem przypisania konkretnego ciężaru właściwego dla pewnego, precyzyjnie nieokreślonego jego zakresu. Nie odniósł się także do różnych wychodów produktów wzbogacania uzyskiwanych dla frakcji o różnych ciężarach właściwych wzbogacanego materiału. Sytuacja ta jest obrazem braku pełnego bilansowania się masy tych frakcji w pomiarach procesu wzbogacania i ma duże znaczenie dla dokładności wyznaczania krzywej rozdziału. Brak zwrócenia uwagi na to zagadnienie jest zastanawiający, ponieważ Tromp znaczną część swojej pracy poświęcił dokładności dopasowania krzywej empirycznej do krzywej wynikającej z jego teoretycznych obliczeń. Warto jednak zauważyć, że dokładność eksperymentalnych badań Trompa znacznie przewyższa dokładność innych podobnych badań.

Drugi z zauważonych braków to nieudana próba zastosowania do teoretycznego opisu krzywej rozdziału bardzo specyficznym przekształconej funkcji gęstości prawdopodobieństwa rozkładu normalnego, podczas gdy można było do tego celu użyć dystrybuanty tego rozkładu. To specyficzne przekształcenie polega na przecięciu funkcji gęstości prawdopodobieństwa rozkładu normalnego w punkcie maksimum i zastąpienia części tej krzywej położonej na prawo od maksimum jej lustrzanym odbiciem względem poziomej prostej przechodzącej przez punkt maksimum (Tromp 1937, rys. 8). Trzecie niedociągnięcie to brak trafnej fizycznej interpretacji teoretycznej krzywej, co Tromp sam zauważył pisząc, że zależność, którą się posługuje nie ma sensu fizycznego. Gęstość rozdziału jest przyjęta jako gęstość tej frakcji, której liczba

rozdziału wynosi 50. Problem powiązania ciężaru właściwego rozdziału z pojęciami znanymi wcześniej z teorii wzbogacania idealnego pojawia się w późniejszych pracach innych badaczy (Budryk 1949).

#### Praca A. Terry

A. Terra (Terra, 1938) wykorzystał krzywe rozdziału do oceny pracy różnych wzbogacalników podając także definicję powszechnie i aktualnie używanego wskaźnika jakości procesu wzbogacania nazywanym rozproszeniem prawdopodobnym i oznaczanym zwykle symbolem  $Ep$ . W swoim opracowaniu do aproksymacji krzywej rozdziału zastosował całkową krzywą Gaussa dzisiaj częściej nazywaną dystrybucją rozkładu normalnego, pozostawiając funkcję gęstości rozkładu normalnego do opisu rozproszenia cząstek materiału. Nie wszystkie spostrzeżenia Terry związane krzywymi rozdziału mają całkowicie pozytywny charakter. Pierwsze z jego niedociągnięć, bardzo ważne ze względu na jego dalekosiężne konsekwencje, to zasugerowanie nieistniejących w ogólności całkowo-różniczkowych związków między krzywą rozdziału i krzywą rozproszenia. Stało się tak z powodu nietrafnego przeniesienia na grunt teorii wzbogacania poprawnych związków zachodzących między, jak to Terra określa, "dzwonową i całkową krzywą Gaussa" znanych z rachunku prawdopodobieństwa. To spostrzeżenie potwierdza późniejsza jego praca, (Terra, 1954) chociaż według niego autorem tego przeniesienia pojęć jest Tromp. Terra nie podaje jednak literatury potwierdzającej ten fakt.

Drugie to nieprawidłowa interpretacja ograniczeń wynikających ze skończonego zakresu gęstości cząstek wzbogacanego materiału, co także zaowocowało skierowaniem dalszych badań w złym kierunku, a jest to szczególnie widoczne w niektórych późniejszych pracach [Budryk, 1949, Budryk, 1953, Stępiński, 1964]. Poważnym błędem Terry jest wprowadzenia do teorii wzbogacania stwierdzenia o stałości  $Ep$  dla danego wzbogacalnika później także przeniesionego na związany z  $Ep$  inny wskaźnik zwany imperfekcją. Być może twierdzenie to zbyt nie odbiega od prawdy dla innych niż osadzarka wzbogacalników, lecz z całą pewnością jest całkowicie nieprawdziwe w odniesieniu do osadzarki. Podstawową przyczyną takiego stanu rzeczy jest bardzo silna zależność prędkości wznoszenia i opadania cząstek w wodzie od rozmiaru i kształtu tych cząstek (Surowiak 2006).

Ponadto w końcowej części swej pracy dotyczącej łącznego lub oddzielnego wzbogacania węgla o różnych charakterystykach wzbogacalności Terra podaje nieprawidłowy matematycznie dowód prawdziwego twierdzenia. Poprawny dowód tego twierdzenia z wyjaśnieniem błędu Terry jest zawarty w końcowej części tego opracowania.

Warto zauważyć, że Terra podejmując badania Trompa związane z zależnością między zawartością popiołu i gęstością danej frakcji także nie podał szczegółów tej zależności dla najlżejszych frakcji gęstościowych węgla, co także zauważa Stępiński (Stępiński, 1964). Wyniki badań tej zależności podjęte przez innych badaczy pomijają tę szczególną kwestię, mającą duże znaczenie w praktyce wzbogacania dla dokładności stabilizacji zawartości popiołu w koncentracie węglowym (Bartoniak, 2008).

#### Prace W. Budryka

Wprowadzenie do polskiej literatury wyników prac wyżej wymienionych autorów zawdzięczamy przede wszystkim jednej z prac W. Budryka (Budryk, 1949).

Pracy tej poświęcone zostanie znacznie więcej uwagi niż pozostałym, ponieważ miała ona ogromny wpływ na utrwalenie się na polskim gruncie naukowym podstaw teorii krzywych rozdziału ze wszystkimi jej zaletami, ale także i nieprawidłowościami.

Budryk powołując się na badania Trompa i Terry dotyczących zjawiska układania się cząstek w poszczególnych warstwach powstających w trakcie wzbogacania w wodnej osadzarko pulsacyjnej podał poniższą zależność:

$$z(\delta) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2(\delta-\delta_i)^2} \quad (1)$$

gdzie:

$z$  – skupienie ziaren o ciężarze właściwym  $\delta$

$h$  – parametr funkcji prawdopodobieństwa

$e$  – zasada logarytmów naturalnych

$\delta_i$  – ciężar właściwy ziaren rozproszonej frakcji

$\delta$  – ciężar właściwy ziaren frakcji, do której trafiają ziarna o ciężarze właściwym  $\delta_i$

Oznaczenia i ich opis poszczególnych zmiennych podane są jak w pracy (Stępiński, 1964), ponieważ Budryk w swej pracy nie podał fizycznej interpretacji zmiennej  $z(\delta)$  określając ją jako funkcję prawdopodobieństwa Gaussa. Zależność (1) mimo, że nie zostało podane jej formalne wyprowadzenie posiada wielką wagę, ponieważ jest historycznie pierwszym matematycznym zapisem relacji jakie zachodzą między ciężarem właściwym cząstki wzbogacanego materiału i gęstością warstwy jaką tworzy zbiór rozproszonych cząstek w trakcie procesu wzbogacania w osadzarko. Na wiele lat wytyczyła ona kierunek dalszego rozwoju teorii, mimo że jest tylko szczególnym, lecz ważnym przypadkiem. Zależność (1) podaje rozkład rozproszenia się cząstek o ciężarze właściwym  $\delta_i$  w warstwach o ciężarze właściwym  $\delta$  utworzonych przez wzbogacany w osadzarko materiał. Istotne w tym miejscu jest zauważenie, że podana zależność określa rozproszenie się cząstek tylko o jednym ciężarze właściwym równym  $\delta_i$ . Tak więc, jeżeli zależność (1) potraktować jako funkcję gęstości jednowymiarowego rozkładu prawdopodobieństwa to zmienną losową tego rozkładu jest ciężar właściwy warstwy do której trafiają cząstki o różnej gęstości. Z tej uwagi wynika ważny wniosek, że dla oceny rozdziału wzbogacanego materiału między dwa produkty wzbogacania konieczna jest znajomość rozproszenia wszystkich frakcji gęstościowych nadawy.

Kierunek wytyczony przez tę pracę okazał się nie najlepszy z powodu kilku poważnych uchybień w dalszej jej części. Pierwszym z nich było niepoprawne wyprowadzenie z tej zależności wzoru określającego krzywą rozdziału, co w świetle przedostatniego z powyższych zdań nie jest możliwe. To wyprowadzenie zawiera dwa poważne błędy merytoryczne. Pierwszy z nich wyjaśnia fizyczna interpretacja wzoru (1) w połączeniu z uwagami zawartymi na stronach 879-881 (Budryk, 1949). Wzór (1) jest zapisem funkcji gęstości prawdopodobieństwa rozkładu podającego prawdopodobieństwo, że cząstka o ciężarze właściwym  $\delta_i$  trafi do warstwy o ciężar-

rze właściwym  $\delta$ . Zmienną losową tego rozkładu jest ciężar właściwy warstwy  $\delta$ , a ciężar właściwy rozpraszanych cząstek  $\delta_i$  jest jego wartością oczekiwaną. Takich rozkładów jest więc tyle, ile jest rozróżnialnych ciężarów właściwych  $\delta_i$ . Całkowanie tej funkcji w całym zakresie istniejących warstw przyjętych jako trafiające do odpadów daje liczbę określającą jaka część wszystkich cząstek o ciężarze właściwym  $\delta_i$  trafiła do odpadów, a tak definiowana jest liczba rozdziału dla frakcji cząstek nadawy o ciężarze właściwym  $\delta_i$ . Zatem aby otrzymać krzywą rozdziału takie całkowanie trzeba oddzielnie przeprowadzić dla każdego ciężaru właściwego cząstki z rozważanego zakresu ciężarów właściwych  $\delta_i$ , ponieważ dla każdego tych ciężarów właściwych funkcja podcałkowa jest inna. Dlatego wzór 11 ze str. 881 i jego dalsze przekształcenie nie przedstawia faktycznie krzywej rozdziału, lecz tylko jedną liczbę rozdziału z tej krzywej. Stąd także wzór 13 nie może być poprawny tym bardziej, że zmienione zostały granice całkowania wzoru 12 bez właściwego uzasadnienia. Możliwe jest jednak inne wyjaśnienie tej kwestii wynikające z rys.3 na str. 881 (Budryk, 1949). Na tym rysunku pokazana jest krzywa rozproszenia płuczki barytowej, w której fizyczne nie ma warstw materiału, zatem nie może istnieć rozproszenie w rozumieniu podanym wzorem (1). W takiej sytuacji pojawia się pytanie o eksperymentalne podstawy krzywej rozproszenia dla płuczki barytowej. Jedyne takie eksperymentalne uzasadnienie pojawia się, gdy przyjąć że pod nazwą krzywej rozproszenia Budryk rozumie także pochodną krzywej rozdziału, czego potwierdzeniem może być wspomniana wyżej zmiana granic całkowania dla wzoru 13. Przypuszczenie to może uzasadniać nieprawdziwa i bardzo niejasno sformułowana uwaga ze str. 881, że rozproszenie cząstek w poszczególnych warstwach jest takie samo jak zawartość cząstek o różnych ciężarach właściwych w danej warstwie. Niejasność wynika ze stwierdzenia "że krzywa rozproszenia z (ABC) jest jednocześnie krzywą z1 względnej (w stosunku do poszczególnych frakcji) zawartości ziarn o różnym ciężarze właściwym w danej elementarnej frakcji ( $\delta_i$ )". Niejasność znika, gdy zamiast  $\delta_i$  przyjąć  $\delta$  lecz i tak nieprawdziwość tego stwierdzenia pozostaje. Jako błąd drukarski należy przyjąć nazwę rys. 4 ze str.881 bez wątpliwości przedstawiającego dwie krzywe rozproszenia. Z tego rysunku wynika, że ciężar właściwy rozdziału  $\Delta$  jest ciężarem właściwym warstwy (a nie cząstki jak to wynika z definicji ciężaru właściwego rozdziału). Zatem formalnie ciężar właściwy  $\Delta$  nie może być ciężarem właściwym rozdziału, tak jak to przyjmuje Budryk, nawet wtedy, gdy zgodnie z równaniem [9] ze str. 880 może także oznaczać ciężar właściwy  $\Delta$  rozpraszanej frakcji.

Ponadto w omawianej pracy Budryk, prawdopodobnie zasugerowany błędem w pracy Terry, dokładnie analizuje ograniczenia zakresu gęstości cząstek wzbogacanego materiału, które to ograniczenie nie ma żadnego znaczenia dla rozpraszania się cząstek, ponieważ nie istniejące cząstki nie podlegają rozpraszaniu. Można przypuszczać, że źródłem tego błędu jest przyjęcie istnienia zależności między krzywą rozdziału i krzywą rozproszenia analogicznej jak w rachunku prawdopodobieństwa zależności między dystrybuantą rozkładu i funkcją gęstości prawdopodobieństwa czyli traktowania rozproszenia jako pochodnej krzywej rozdziału, czego początki są do zauważenia w pracy Terry. W związku z tym dalsze rozważania Budryka związane z położeniem ciężaru wła-

ściwego rozdziału w pobliżu skrajnych ciężarów właściwych cząstek występujących we wzbogacanym materiale są całkowicie nieprawidłowe. Te rozważania pociągnęły to za sobą dalsze skutki takie jak niewłaściwa interpretacja ograniczeń krzywej rozproszenia, która doprowadziła do wprowadzenia, nie mających uzasadnienia w tym rozumieniu zagadnienia, pojęć takich jak teoretyczna i rzeczywista krzywa rozdziału i niepoprawnych związków tych krzywych z ograniczeniami zakresu ciężarów właściwych cząstek wzbogacanego materiału. Przedstawione w pracy (Budryk, 1949) na rys. 7 krzywe rozdziału nie mogą być tymi krzywymi, ponieważ pokazane na tym rysunku wszystkie krzywe są funkcjami ciężaru właściwego warstwy. Dlatego wynikający z tego rysunku sposób wykreślenia poprawionej krzywej rozdziału nie jest właściwy. W związku z tym także praca (Budryk, 1953), w której przedstawiono sposób znajdowania teoretycznej krzywej rozdziału na podstawie znajomości krzywej rzeczywistej nie może być poprawna. Najbardziej istotną nieprawidłowością w rozumowaniu Budryka jest przyjęcie, że ograniczeniem stosowalności krzywej rozproszenia jest ograniczenie zakresu ciężaru właściwego cząstek wzbogacanego materiału. Takie ograniczenie jest tylko przyczyną występowania innego istotniejszego ograniczeniem jakim jest zakres ciężarów właściwych warstw w łóżu osadzarki zależny od zakresu ciężarów właściwych cząstek wzbogacanego materiału oraz rozproszenia cząstek w procesie wzbogacania. To ograniczenie nie ma także bezpośredniego związku z ciężarem właściwym rozdziału. Drugą nieprawidłowością jest przyjmowanie, że funkcję (krzywą) rozproszenia można poprzez jej całkowanie przekształcić w funkcję (krzywą) rozdziału, która jest funkcją innej zmiennej czyli gęstości cząstek wzbogacanego materiału. Doprowadziło to do rozpowszechnienia w polskiej literaturze traktowania nie mającej fizycznej interpretacji pochodnej krzywej rozdziału jako funkcji rozproszenia. (Stępiński, 1964), (Surowiak, 2006).

Trzecim istotnym błędem w rozważaniach Budryka jest niezauważenie konieczności zmiany postaci rozkładu opisującego rozproszenie, gdy zakres rozproszenia cząstek przekracza granice zakresu istniejących warstw. Przedstawione w powyższych rozważaniach rys. 1 i 2 dają obraz zmian funkcji rozproszenia jakie należy przyjąć, aby zachować bilans masy rozpraszanych cząstek. Analizowane prace Budryka z tego zakresu zawierają także szereg pomniejszych innych nieścisłości, pozostających bez większego znaczenia dla dalszych rozważań. Aby nie tworzyć niewłaściwego wrażenia przypisania wszystkich tych niedociągnięć Budrykowi trzeba zauważyć, że w historii nauki znane są poważne błędy wielkich autorytetów (Galileusz, Newton, Laplace, Euler, Einstein) i popełnianie ich przy poznawaniu nieznanych zjawisk jest zawsze możliwe. Natomiast nie jest do zaakceptowania bezkrytyczne przyjmowanie tych błędów przez innych badaczy, a taka sytuacja dotyczy głównie kontynuatorów prac Budryka.

### Praca B.S. Gottfrieda

Pojęcie uogólnionej krzywej rozdziału zostało wprowadzone przez Gottfrieda w jego pracy z 1978 roku (Gottfried, 1978). Ważność tego uogólnienia jest nie do zakwestionowania, jednakże warto przyjrzeć się bliżej ograniczeniom, jakie to uogólnienie powinno spełniać, a których próżno szukać w tej pracy. Jeżeli rozważać kilka takich samych krzywych

rozdziału przesuniętych na osi odciętych, czyli krzywych różniących się tylko ciężarem właściwym rozdziału, to ich zastąpienie jedną krzywą wykreśloną dla argumentu, którym jest iloraz ciężaru właściwego cząstki i ciężaru właściwego rozdziału nie budzi żadnych wątpliwości. Z taką sytuacją mamy jednak do czynienia tylko dla pewnych szczególnych warunków. Według Gottfrieda te warunki ograniczają się do wzbogacania takiej samej nadawy w jednym wzbogalniku z różnymi ciężarami właściwymi rozdziału. Istotne jest jednak zauważenie, że sytuacja taka w praktyce może się zdarzać tylko dla wzbogalników mogących pracować z wysoką skutecznością wzbogacania takich jak wzbogalniki z cieczą ciężką, których skuteczność wzbogacania jest praktycznie niezależna od wybranego ciężaru właściwego rozdziału. Tego rodzaju sytuacja nie zachodzi dla osadzarek, których nachylenie krzywej rozdziału zwykle spada wraz ze zwiększaniem ciężaru właściwego cząstek wzbogacanego materiału dając efekt asymetrii tej krzywej rosnącej także wraz z ciężarem właściwym rozdziału. Dlatego uogólnione krzywe rozdziału nie powinny być stosowane do prognozowania wyników wzbogacania w osadzarkach. Krzywe uogólnione można stosować tylko wtedy, gdy wszystkie uzyskiwane empirycznie krzywe rozdziału mają takie samo nachylenie przy różnych ciężarach właściwych rozdziału.

#### Praca W. Zapały

W pracy (Zapała. 1988) podana jest jedyna w literaturze, znanej autorowi niniejszej pracy, poprawna interpretacja związków jakie zachodzą między krzywą rozdziału i krzywą rozproszenia. Najważniejszym efektem tej pracy jest pokazanie, że funkcja rozproszenia i funkcja (krzywa) rozdziału są opisane dla dwu różnych zmiennych. Krzywa rozdziału jest funkcją gęstości cząstek wzbogacanego materiału, podczas gdy funkcja (krzywa) rozproszenia jest funkcją gęstości warstw elementarnych, jakie wzbogacany materiał tworzy w łożu osadzarki. To wyraźne dla osadzarek rozgraniczenie obu zmiennych całkowicie burzy całkowicie-różniczkową zależność obu tych funkcji podawaną w literaturze. Zwraca także uwagę na całkowicie niepoprawną interpretację krzywej rozproszenia jako pochodnej krzywej rozdziału.

Na stronach 46 i 47 pracy Zapały podana jest prawidłowa interpretacja związków, jakie zachodzą między krzywą rozdziału, a krzywą rozproszenia. Istotnym podsumowaniem tego jest stwierdzenie, że każdy punkt krzywej rozdziału jest także punktem dystrybuanty rozkładu określającego prawdopodobieństwo trafienia cząstki określonej gęstości do produktu lekkiego procesu wzbogacania. Z opisu tego jednoznacznie wynika, że zmienną losową rozważanego rozkładu jest gęstość warstwy, do której trafiają cząstki różnych gęstości. Krzywa rozdziału jest zbiorem punktów poszczególnych dystrybuant określonych dla różnych gęstości cząstek przy ustalonej gęstości warstwy, która jest graniczną warstwą dzielącą wzbogacany materiał na produkt lekki (górnny) i produkt ciężki (dolny). Istotnym wnioskiem z przedstawionego wywodu jest stwierdzenie, że liczba rozdziału określa także pewne prawdopodobieństwo, lecz zmienną losową przyjętą do określenia tego prawdopodobieństwa nie jest gęstość cząstek wzbogacanego materiału, lecz jest to gęstość warstwy.

Jednakże Zapała nie zauważył bardzo istotnego dla poprawnego opisu tych zjawisk znaczenia ograniczenia zakresu

gęstości możliwych warstw w łożu osadzarki oraz zależności tych ograniczeń od rozproszenia prawdopodobnego procesu wzbogacania. Ograniczenia te także powodują to, że jego dalsze rozważania związane z rozpatrywaniem wzbogacania ze stałym rozproszeniem lub ze stałą imperfekcją niezbyt precyzyjnie przedstawiają obraz rzeczywistego wzbogacania. Trzeba także zauważyć, że zastosowany w wyprowadzeniu jego modelu schemat losowania nie jest poprawny, ponieważ nie uwzględnia istotnej dla tego modelu zmiany gęstości cieczy ciężkiej imitującej gęstość warstwy w sytuacji, gdy trafi do niej cząstka o gęstości różnej od średniej gęstości warstwy, co musi spowodować zmianę gęstości warstwy (cieczy). Trzeba również dodać, że pojęcie imperfekcji przez niego używane jest pewnym uogólnieniem tego pojęcia dla opisu różnego rozpraszania się cząstek o różnych gęstościach. Rozważania Zapały dotyczące różnych teoretycznych sytuacji wynikających z wyprowadzonego przez niego modelu rozkładu warstw i cząstek doprowadzają do zauważenia istotnej sprawy jaką jest możliwość rozpraszania się cząstek o różnych gęstościach z różnym rozproszeniem. Z jego rozważań także wynika potwierdzenie dla obserwowanego empirycznie faktu, że wraz ze wzrostem gęstości cząstek rośnie także ich rozproszenie w warstwach łoża osadzarki

Ważnym osiągnięciem pracy Zapały jest pokazanie bardzo wysokiego udziału szumu białego w wynikach pomiarów składu densymetrycznego i zawartości popiołu węgla surowego oraz produktów wzbogacania w osadzarkach, co może stanowić pewne usprawiedliwienie dla istnienia losowej interpretacji procesu wzbogacania w tej maszynie.

#### Poprawny dowód twierdzenia Terry

Dla mieszanek dwu różnych węgla wzbogaczonych idealnie ( $E_p = 0$ ) bilans mas i zawartości popiołu lekkich produktów wzbogacania można zapisać poniższymi równaniami:

$$\gamma = u\gamma_1 + (1-u)\gamma_2 \quad (2)$$

$$\gamma\vartheta = u\gamma_1\vartheta_1 + (1-u)\gamma_2\vartheta_2 \quad (3)$$

$$\vartheta_1 = \frac{\int_0^{\gamma_1} \alpha_1(\gamma_1) d\gamma_1}{\gamma_1} \quad (4)$$

$$\vartheta_2 = \frac{\int_0^{\gamma_2} \alpha_2(\gamma_2) d\gamma_2}{\gamma_2} \quad (5)$$

gdzie:

$\gamma, \gamma_1, \gamma_2$  – wychód mieszanek oraz odpowiednio wychody produktu lekkiego pierwszego i drugiego wzbogalnika;

$\vartheta, \vartheta_1, \vartheta_2$  – zawartość popiołu odpowiednio w mieszanke oraz w produktach lekkich pierwszego i drugiego wzbogalnika;

$\alpha_1$  – zawartość popiołu we frakcji o gęstości  $\gamma_1$  materiału surowego pierwszego wzbogalnika

$\alpha_2$  – zawartość popiołu we frakcji o gęstości  $\gamma_2$  materiału surowego drugiego wzbogalnika

$u$  – udział składnika pierwszego w całości obu wzbogaczonych węgli.

Tę samą, stałą zawartość popiołu mieszanek tworzonej z produktu lekkiego dwu wzbogalników można osiągnąć na wiele sposobów, lecz tylko jeden z tych sposobów daje maksymalny wychód mieszanek.

Twierdzenie Terry:

Wzbogacając dwa różne węgle surowe i sporządzając mieszanę o stałej zawartości popiołu równej  $\vartheta$  z produktów lekkich dwu wzbogacalników maksimum wychodu mieszanki uzyskamy, gdy granice separacji obu węgli będą tak dobrane, że zostanie spełniony warunek

$$\alpha_1(\gamma_1) = \alpha_2(\gamma_2)$$

Warunek ten według Terry ma wynikać z równania:

$$u\alpha_1 d\gamma_1 + (1-u)\alpha_2 d\gamma_2 = 0$$

(ostatnie z równań na str. 402 w pracy (Terra, 1938) które ma zachodzić, gdy  $\alpha_2 = \alpha_1$

Wstawiając do tego równania  $\alpha_2 = \alpha_1$  otrzymujemy  $\alpha_1 [u d\gamma_1 + (1-u) d\gamma_2] = 0$ , co nigdy nie zachodzi ponieważ  $\alpha_1 > 0$ ,  $u > 0$  i  $(1-u) > 0$  oraz  $d\gamma_1$  i  $d\gamma_2$  mają ten sam znak.

Poprawny dowód tego twierdzenia sprowadza się do znalezienia warunku koniecznego dla istnienia maksimum funkcji dwu zmiennych (równanie 2) przy ograniczeniu (równanie 3). Jednym ze sposobów rozwiązania tego zadania jest metoda Lagrange'a. Układ równań tej metody dla rozważanego przypadku jest następujący (Bronsztajn, 1970):

$$\frac{u\gamma_1\vartheta_1 + (1-u)\gamma_2\vartheta_2}{u\gamma_1 + (1-u)\gamma_2} - \vartheta = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial \gamma_1} [u\gamma_1 + (1-u)\gamma_2 + \lambda (\frac{u\gamma_1\vartheta_1 + (1-u)\gamma_2\vartheta_2}{u\gamma_1 + (1-u)\gamma_2} - \vartheta)] = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial \gamma_2} [u\gamma_1 + (1-u)\gamma_2 + \lambda (\frac{u\gamma_1\vartheta_1 + (1-u)\gamma_2\vartheta_2}{u\gamma_1 + (1-u)\gamma_2} - \vartheta)] = 0 \quad (8)$$

gdzie  $\lambda$  - mnożnik Lagrange'a

Po wykonaniu różniczkowania i wykorzystaniu zależności (4) i (5) równania (7) i (8) przyjmują postać:

$$1 + \lambda (\frac{\alpha_1(\gamma_1)}{u\gamma_1 + (1-u)\gamma_2} - \vartheta) = 0$$

$$1 + \lambda (\frac{\alpha_2(\gamma_2)}{u\gamma_1 + (1-u)\gamma_2} - \vartheta) = 0$$

z których po porównaniu lewych stron powyższych równań natychmiast wynika zależność, którą należało udowodnić.

Można także zauważyć, że to twierdzenie pozostanie prawdziwe dla wzbogacania rzeczywistego ( $E_p \neq 0$ ) jeżeli charakterystyki wzbogacalności zostaną zastąpione charakterystykami wzbogacania. Podane twierdzenie Terry jest szczególnym przypadkiem optymalizacji procesu mieszania koncentratów ze wzbogacania różnych węgli surowych. Ogólniejszy dowód tego twierdzenia wraz z fizyczną interpretacją wyników podany jest w pracy Cierpisa (Cierpisz, 1980). Ponadto wypada zauważyć, że to bardzo interesujące z poznawczego i ważne z ekonomicznego punktu widzenia twierdzenie niestety nie ma aktualnie szerszego zastosowania w praktyce wzbogacania węgla. Jednym z istotnych tego powodów jest brak metod pomiarowych umożliwiających dostatecznie szybkie wyznaczenie charakterystyk wzbogacanych węgli surowych niezbędnych do obliczenia gęstości rozdziału dla

oddzielnie wzbogacanych materiałów surowych, których produkty wzbogacania tworzą mieszanę.

## Podsumowanie

1. Przedstawione uwagi do podstawowych i do dziś bez zastrzeżeń przyjmowanych prac są wystarczającym powodem do dokonania istotnych korekt w części teorii wzbogacania grawitacyjnego. Zmiany te zasadniczo sprowadzają się do skorygowania rozkładów prawdopodobieństwa związanych z opisem rozpraszania się cząstek uwzględniających wszystkie istotne ograniczenia istniejące w procesie osadzania, usunięcia z rozkładów ograniczeń dla możliwości tworzenia się warstw o różnych gęstościach oraz pominięcia niepoprawnych związków między krzywą rozproszenia i krzywą rozdziału.

2. Wielokrotne cytowanie bez odpowiednich uwag błędnych prac pozwala zauważyć fakt powszechnego i trwającego wiele lat zjawiska bezkrytycznego przyjmowania niektórych z opublikowanych prac dotyczących wzbogacania grawitacyjnego.

3. Zamiarem autora jest przedstawienie w następnych publikacjach teoretycznego modelu procesu wzbogacania w osadzarce wolnego od zastrzeżeń do istniejących publikacji przedstawionych w tej pracy.



### Dodatek

W dodatku zostały zamieszczone wybrane fragmenty ważniejszych i jednocześnie trudno dostępnych cytowanych prac, które mogą pozwolić Czytelnikowi na własną ocenę przedstawianych zagadnień.

#### Cytaty z pracy Trompa (Tromp 1937)

#### Cytaty z pracy Budryka (Budryk 1949)

1. str. 879–880

Z doświadczeń Trompa wynika, że im większa jest różnica ciężarów właściwych z różnych warstw, tym mniejsza jego ilość trafia z jednej warstwy do drugiej. Niezależnie od tego im większą mamy ilość ziarn o określonym ciężarze właściwym, tym większa ilość tych ziarn trafia do innych warstw, przy czym jak wykazało doświadczenie, udział węgla pewnej frakcji w różnych warstwach jest proporcjonalny do ilości tej frakcji występującej w nadawie. Jeżeli wobec tego będziemy operowali nie absolutną ilością rozproszonych ziarn frakcji, lecz ilościami względnymi do zawartości tej frakcji w nada-

wie, wówczas rozproszenie nie będzie zależało od udziału poszczególnych frakcji w materiale wejściowym, a więc od kształtu krzywej wzbogacalności. Rozproszenie to nie zależy poza tym od absolutnej wielkości ciężaru właściwego frakcji  $\delta_i$ , lecz jedynie tylko od różnicy ciężarów właściwych  $\delta - \delta_i$  gdzie  $\delta_i$  jest ciężarem właściwym węgla rozproszonej frakcji,  $\delta$  - ciężarem właściwym warstwy, do której on się dostaje. Prawo to, jak wykazały doświadczenia Terra, pokrywa się całkowicie z funkcją prawdopodobieństwa Gaussa:

$$z = z(\delta) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2(\delta - \delta_i)^2} \quad [9]$$

gdzie  $h$  jest parametrem funkcji prawdopodobieństwa.

2. str. 880–882

Na rys 3 przedstawione zostały krzywe rozproszenia  $z$  (wzór 9) dla wypadków przemysłowego wzbogacania w ośrodkach ciężkich (krzywa I) w płuczkach z automatyczną regulacją odprowadzania odpadów (II) oraz w wialniach. W pierwszym wypadku mamy największą dokładność wzbog-

Tab. 1. Rozdział według gęstości  
Tab. 1. Distributin According to Density

Dichtestufen	Zahlentafel 1. Verteilung nach der Dichte.					
	Aufgabe	Gewaschene Kohle		Sinkprodukt		Verteilungszahl
	%	%	v/o	%	v/o	
a	b	c	d	e	f	
bis 1,350	52,45	54,68	52,21	5,32	0,236	0,45
1,350–1,400	26,46	27,55	26,28	4,06	0,180	0,68
1,400–1,450	6,23	6,45	6,16	1,46	0,065	1,05
1,450–1,500	2,340	2,420	2,307	0,74	0,033	1,41
1,500–1,550	1,975	2,025	1,933	0,95	0,042	2,12
1,550–1,600	1,154	1,173	1,120	0,77	0,034	2,95
1,600–1,650	0,955	0,956	0,914	0,92	0,041	4,30
1,650–1,750	1,570	1,520	1,452	2,66	0,118	7,5
1,750–1,850	1,252	1,130	1,079	3,90	0,173	13,8
1,850–2,000	1,263	0,967	0,924	7,65	0,339	26,9
2,000–2,100	0,700	0,389	0,371	7,42	0,329	47,0
2,100–2,200	0,644	0,279	0,266	8,53	0,378	58,6
2,200–2,300	0,683	0,221	0,211	10,62	0,472	69,0
2,300–2,400	0,620	0,155	0,148	10,62	0,472	76,0
2,400–2,500	0,533	0,037	0,035	11,22	0,498	84,5
+ 2,500	1,168	0,147	0,140	23,16	1,028	—
zus.	100	100	95,56	100	4,438	—

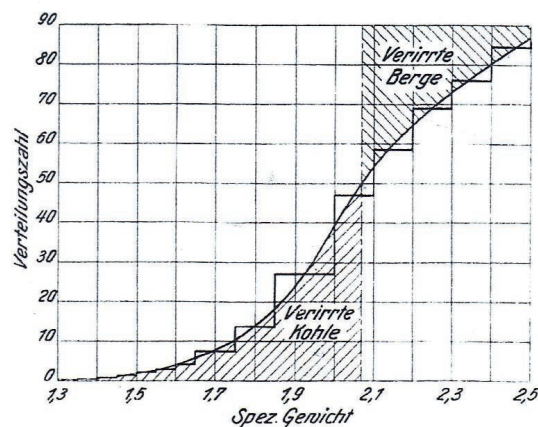


Abb. 5. Verteilungszahlenkurve für Korn 6–1,5 mm.  
(Zweites Setzbett einer Baumschen Stromsetzmaschine mit Holzkolben.)

Rys. 5. Krzywa rozdziału dla ziaren 6-1,5 mm ( drugi przedział przepływowej osadzarki Bauma z drewnianymi tłokami)

Fig. 5. Partition curve of 6-1,5 mm grains (Second Settling Bad of a Baum Jig Flow Washer with Wood Plunger)

gacania, w wypadku natomiast wialni rozproszenie sięga daleko poza właściwą warstwę  $\delta_i$ , a więc dokładność wzbogacania jest tu znacznie mniejsza.

Przyjmijmy, że rozproszenie elementarnej frakcji o c. wł.  $\delta_i$  przedstawia się w postaci krzywej ABC (rys.4). Weźmy oprócz tego frakcję o c. wł.  $\Delta$ , która w myśl powyższych wywodów zostaje rozproszona powyższych wywodów wg krzywej FGH, identycznej z krzywa ABC. Z wykresu tego widzimy, że wobec kompletnej symetrii obu krzywych rzędna DE jest równa rzędnej JK, a wskutek tego stosunkowa (nie absolutna) ilość węgla o c. wł.  $\delta_i$ , jaka trafia do frakcji o c. wł.  $\Delta$ , jest równa stosunkowej ilości węgla o c. wł.  $\Delta$  trafiającej do frakcji o c. wł.  $\delta_i$ . Okoliczność ta pozwala wyciągnąć wniosek, że krzywa rozproszenia z (ABC) jest jednocześnie krzywą z1 względnej (w stosunku do poszczególnych frakcji) zawartości ziarn o różnym ciężarze właściwym w danej elementarnej frakcji ( $\delta_i$ ).

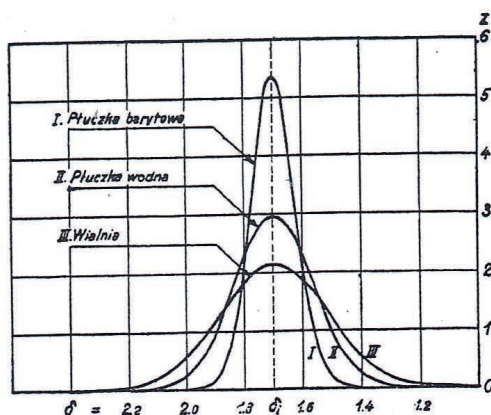
3. str.881–882

Jeżeli ciężar właściwy  $\Delta$  jest granicą rozdziału naszego materiału na koncentrat i odpady czyli ciężarem właściwym separacji, wówczas stosunek powierzchni zakreskowanej ADE (rys.4) do całkowitej powierzchni ograniczonej krzywą rozproszenia ABC określa nam względną ilość (x) węgla o ciężarze właściwym  $\delta_i$ , która trafia do odpadów:

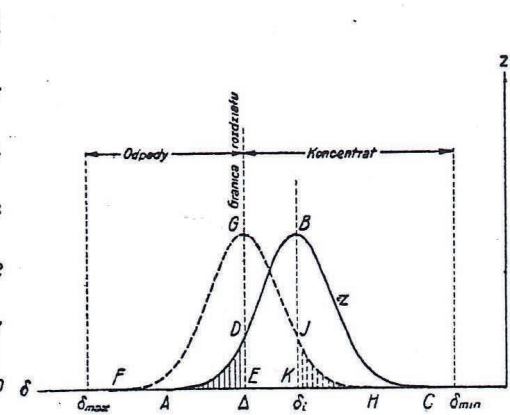
$$x = \frac{\text{pow. ADE}}{\text{pow. ABC}} = \frac{\int_{\Delta}^{\delta_{\max}} z d\delta}{\int_{\delta_{\min}}^{\delta_{\max}} z d\delta} \quad [11]$$

Wartość ta będzie tym mniejsza, im bardziej c. wł.  $\delta_i$  różnie się od c. wł. separacji  $\Delta$ . W przypadku, gdy  $\delta_i = \Delta$  względna ilość węgla o tym ciężarze właściwym trafiająca do odpadów, będzie taka sama, jak i ilość trafiająca do koncentratu, a wskutek tego wartość x będzie się równała 50%. Tak więc ziarna o ciężarze właściwym równym ciężarowi właściwemu separacji ( $\Delta$ ) trafiają w połowie do koncentratu, w połowie do odpadów.

Ciężar właściwy separacji ( $\Delta$ ) odpowiada również ciężarowi właściwemu tej frakcji, której krzywa rozproszenia (FGH-rys.4) posiada na granicy rozdziału swoje maksimum (punkt G).



Krzywe rozproszenia z  
Rys. 3



Krzywe rozdziału  
Rys. 4

Fig. 3. Dispersion Curves z

Fig. 4. Partition Curves

W wypadku, gdy granice ciężarów właściwych frakcji węglowych ( $\delta_{\min}$  i  $\delta_{\max}$ ) są dostatecznie odległe w obie strony od granicy separacji  $\Delta$ , możemy bez popełnienia znacznego błędu przyjąć, że mianownik w równaniu [11] jest równy 1:

$$\int_{\delta_{\min}}^{\delta_{\max}} z d\delta = \int_{-\infty}^{+\infty} z d\delta = 1$$

Równanie [11] przedstawi się wówczas w postaci :

$$x = \int_{\Delta}^{\delta_{\max}} z d\delta = \int_{\Delta}^{+\infty} z d\delta \quad [12]$$

Przyjmując jako oś symetrii rzędną przechodzącą przez  $\Delta$ , oraz wykreślając (rys.4) krzywą Gaussa FGH identyczną z krzywą ABC, widzimy, że powierzchnia zakreskowana ADE jest równa powierzchni KJH. Mając na względzie wzór [9],

$$x = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{\Delta}^{\delta} e^{-h^2(\delta-\Delta)^2} d\delta \quad [13]$$

Jest to równanie całkowitej funkcji Gaussa.

str. 884

#### Cytat z pracy Zapalę (Zapalę 1988)

str. 46 i 47

Podstawowe pojęcia takie jak: krzywa rozproszenia, liczba rozdziału, krzywa rozdziału są specyficznymi pojęciami i niezachowanie ostrości wyrażen może doprowadzić do niejasności. W celu sprecyzowania określeń przyjmijmy, że gęstością prawdopodobieństwa zmiennej losowej Y będzie funkcja

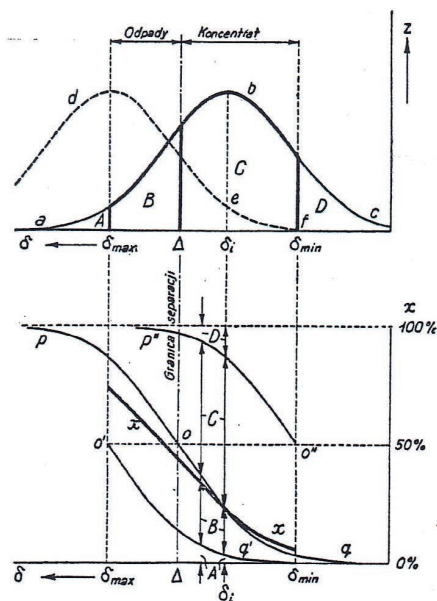
$$z\left(\frac{y-x}{\sigma}\right)$$

gdzie: y- gęstość warstwy, do której trafiają ziarna frakcji elementarnej o gęstości x,  $\sigma$  -odchylenie standardowe rozkładu zmiennej losowej Y.

Dystrybucją tego rozkładu jest funkcja

$$Z(y = \text{var.}, x = \text{const}) = \int_{-\infty}^y z\left(\frac{y-x}{\sigma}\right) dy$$

która przedstawia zależność funkcyjną liczby rozdziału dla



**Poprawiona krzywa rozdziału  $x$**   
Rys. 6 i 7

Fig. 6 and 7. Corrected Partition Curve  $x$

danej frakcji elementarnej od zmiennego położenia linii rozdzielającej wzbogacany materiał na produkt lekki i produkt ciężki. Pochodna funkcji  $Z(y = \text{var.}, x = \text{const.})$  względem zmiennej  $y$  (zmiennej gęstości warstw wzbogacanego materiału) jest krzywą rozproszenia, którą na wstępie przyjęliśmy. Liczba rozdziału dla frakcji elementarnej obliczana jest ze wzoru

$$\text{liczba rozdziału} = Z(y = y_0 = \text{const.}, x = \text{const.})$$

tzn. dla określonego położenia linii rozdzielającej wzbogacany materiał na dwa produkty i dla określonej gęstości frakcji, stanowi zatem określoną wartość. Przy określonym położeniu linii rozdzielającej wzbogacany materiał można obliczyć liczby rozdziału dla poszczególnych frakcji o gę-

stościach  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Na podstawie przyjętych wartości  $x_1, x_2, \dots, x_n$  oraz obliczonych liczb rozdziału  $Z(y = y_0, x = x_1), Z(y = y_0, x = x_2), \dots, Z(y = y_0, x = x_n)$  można w układzie współrzędnych  $Z, x$  sporządzić wykres przedstawiający zależność liczb rozdziału od gęstości frakcji elementarnej. Podkreśla się, że krzywa rozdziału nie jest dystrybucją zmiennej losowej  $Y$ . Przy wykreśleniu w przestrzeni trójwymiarowej, liczby rozdziału tworzą powierzchnię. Przecięcie tej powierzchni płaszczyzną  $y = y_0$  utworzy linię, która jest krzywą rozdziału dla określonej gęstości rozdziału  $y_0$ . Natomiast przecięcie tej powierzchni płaszczyzną  $x = \text{const.}$  tworzy linię, która jest dystrybucją zmiennej losowej  $Y$  i oznacza prawdopodobieństwo zdarzenia, że ziarna frakcji elementarnej o gęstości  $x = \text{const.}$  trafią do warstw wzbogacanego materiału o gęstościach mniejszych od  $y$ .

## Literatura – References

1. Bartoniak W. Głowiak S. (2008) Przyczyny ograniczenia skuteczności regulacji zawartości popiołu w koncentracie węglowym Materiały XIV Konferencji Automatyzacja Przeróbki Kopalni Szczyrk str. 9-21
2. Belugou M. Ulmo M. (1950) Représentation des résultats d'une épuration. Conférence Internationale sur la Préparation des Charbons Paris Juin 1950 A3 p. 16-20
3. Bronsztejn I.N. i Siemiendajew K.A.(1970) Matematyka Poradnik Encyklopedyczny PWN Warszawa str. 412-413
4. Budryk W. (1949) Działanie płuczek i wialni w świetle teorii część pierwsza Przegląd Górniczy 1949 nr 9 (620) str. 880 -887
5. Budryk W. Górski J. (1953) Określenie wskaźników dokładności pracy płuczek Archiwum Górnictwa i Hutnictwa Kraków str. 276-283
6. Cierpisz S. (1980) Automatyzacja procesów przeróbki mechanicznej węgla. Wydawnictwo Śląsk Katowice str. 162-166
7. Cierpisz S. (2012) Automatyka regulacja procesu wzbogacania węgla w osadzarkach Wydawnictwo Politechniki Śląskiej Gliwice str. 13-15
8. Głowiak S. (1996) O przyczynach niejednoznaczności wyznaczania rozproszenia prawdopodobnego i imperfekcji we wzbogacalnikach grawitacyjnych Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej Gliwice Z.231 str. 143-152
9. Gottfried B.S. (1978) A generalization of distribution data for characterizing the performance of coal cleaning equipment Mineral Processing str.1-20
10. Kubik L.T Krupowicz A. (1982) Wprowadzenie do rachunku prawdopodobieństwa i jego zastosowań PWN Warszawa str.108,185,194
11. Mishra B.K., Mehrotra S.P. (2001) A jig model based on the discrete element method and its experimental validation. Int.J. of Miner.Process., 63 str. 177-189.
12. Nawrocki J. (1975) Skuteczność przesiewania i grawitacyjnego wzbogacania Politechnika Śląska Skrypty Uczelniane nr 516 str. 174-225
13. Stępiński W. (1964) Wzbogacanie grawitacyjne PWN Łódź-Warszawa-Kraków 1964 str.137-144
14. Surowiak A. (2006) Wpływ rozkładu właściwości fizycznych i geometrycznych ziaren na dokładność rozdzielania w osadzarkach na przykładzie węgla. Rozprawa doktorska AGH, Wydział Górnictwa i Geoinżynierii Kraków str. 69-70
15. Tumidajski T. (1993) Zastosowanie metod statystycznych w analizie procesów przeróbki surowców mineralnych Śląskie Wydawnictwo Techniczne Katowice str. 93
16. Terra A. (1938) Essai d'une theorie de lavage. Reveue l'Industrielle Minerale nr 425 str. 383-403
17. Terra A. (1954) Significance of Anamorphosed "Partition Curve" and "Ecart Probable" in Washery Control Second Coal Preparation Congress Essen C3 p.1
18. Tromp K.F. (1937) Neue Wege für Beurteilung der Aufbereitung von Steinkohlen. Glückauf nr 6 str,125-131, nr 7 str.151-156
19. Zapała W. (1988) Opracowanie i cyfrowe badania symulacyjne algorytmów sterowania procesu wzbogacania węgla z wykorzystaniem pomiaru rozkładu frakcji densymetrycznych w łożu osadzarki Praca doktorska. Politechnika Śląska, Instytut Elektryfikacji i Automatyzacji Górnictwa Gliwice str. 46-65

### *The Reasons for the Necessity to Correct Some Part of Gravitational Enrichment Theory*

*The general outline of chosen problems concerning the theoretical presentation of the phenomena occurring in hard coal beneficiation in jigs on the basis up to date state of papers related to partition curve and grains dispersion is presented. In the following part are presented the details of critical analysis of widely accepted without reservations papers, which in not correct manner theoretichly explains the particle dispersion of material being beneficiated in the jig. Special attention was paid to omitted, up to now, limits of grain dissipation possibility, forming the density diversified layers and effects of skipping these details for appropriate theoretical explanation of the phenomena that occurs during the jig operation and in appraisal of this process.*

*Keywords: hard coal beneficiation, jig, partition curve, grains dispersion*