



Problemy doskonalenia teoretycznych podstaw i procedur w badaniach wyrywkowych produktów ziarnistych

Some problems pertaining to improvement of theoretical basis and procedures for particulate product sampling

Jerzy MARTYNIAK ¹⁾

¹⁾Doc. dr hab. inż.; Główny Instytut Górnictwa, Zakład Oceny Jakości i Wzbogacania Kopaliny; Pl. Gwarków 1, 40-166 Katowice; tel.: (+ 48-32) 259 22 48

RECENZENCI: Prof. Ing. Jiří ŠKVARLA, CSc.; Prof. zw. dr hab. inż. Kazimierz SZTABA,

Streszczenie

Istnieje wiele rodzajów materiałów i produktów ziarnistych, użytkowanych w gospodarce światowej. Ocenia się je według zazwyczaj dużej liczby rozmaitych właściwości. Różnorodność przypadków pod względem specyfiki tworzywa produktu, warunków i wyposażenia technicznego w procesie produkcji powoduje konieczność odpowiedniego przystosowania procedury estymacyjnej do konkretnych okoliczności. Głównie dotyczy to sposobu postępowania w wyrywkowym badaniu kontrolnym produktów i materiałów ziarnistych. Istotną sprawą jest zdefiniowanie partii produktu ziarnistego, jako populacji jednostek losowania. Na ogół estymacja parametrów jakościowych produktów ziarnistych wymaga skomplikowanych procedur. Najczęściej obejmują one kilka stadiów, począwszy od pobierania próbek, a skończywszy na oznaczaniu właściwości w próbkach analitycznych. Wyniki oznaczania przedstawiające jakość produktu ziarnistego charakteryzują się niepewnością, która zawsze powstaje, gdy stosuje się badanie wyrywkowe, jako podstawę pozyskania informacji o zbiorowości jednostek statystycznych. Niepewność ta wiąże się ze statystycznym przybliżeniem, które jest miernikiem rozrzutu wartości liczbowych parametrów jakościowych pomiędzy estymatorami, jako elementami zmiennej losowej. Zapewnienie pożądanej miarodajności wyników oznaczania nie jest możliwe bez wymagań dla precyzji estymatorów przedstawiających badane parametry jakościowe produktu. Wymagania takie są bowiem niezbędne w celu umożliwienia oceny czy uzyskana precyzja estymatora jest zadowalająca.

Summary

There are many types of particulate or granular raw materials and products being used in the world's economy. They are evaluated on the basis of a usually large number of various attributes or properties. The diversity of cases in point of material, equipment and production condition specificity is reason of necessity to adequately adapt estimation procedures in local conditions. In the main, the operating means of acceptance sampling plans and procedures for the inspection of particulate products or materials are taken into consideration. The essential matter is in order to define a particulate product lot as a sampling unit population. The estimation methods for the specific characteristics of the discussed products are in general complicated. Usually such a method is composed of a few stages: sample taking as the first and making of property determination on test sample as the last. The determination results obtained to present the quality of particulate lot have been with natural uncertainty which always arises in consequence of application of sampling as the basis to provide information on a population of statistical units. The amount of this uncertainty belongs to the statistical approximation which exists between the estimates and the true values of lot properties. This approximation is a measure of dispersion of the property values among all the estimates as elements of random variable. It is not possible to ensure the desirable credibility of determination results without the requirements for precision of estimates which are to represent the true specific characteristics of product lot. These requirements are indispensable to enable for the appreciation: is satisfactory the estimate precision obtained.

1. Wstęp

Produkty ziarniste, które są składowane i transportowane luzem, mają duże znaczenie w gospodarce światowej. Żaden z nich nie nadaje się jednak do użytku i jest bezwartościowy, więc nie może być produktem handlowym, bez dokładnie oznaczonych parametrów jakościowych. Niestety wspomniane produkty są bardzo trudnym materiałem, gdy chodzi o dokładne zbadanie ich właściwości. Z na-

1. Introduction

The particulate products as lots of bulk materials, are of great importance in the world's economy. Every particulate material is of no avail and worthless without closely determined its specific characteristics and, in consequence, may not be a commercial product. Unfortunately, precise determination the quality parameters of sayed materials is very hard to achieve, due to their nature. They by nature

tury rzeczy są one bardzo niejednorodne i zmienne pod względem jakości. Dla uświadomienia sobie przyczyn zmienności każdego z nich, trzeba dysponować wiedzą o ich procesie produkcyjnym, o właściwościach, które wspólnie przedstawiają ich jakość oraz o ich określeniu, jako populacji generalnych statystycznych jednostek losowania.

W nowych technologiach produkcji i użytkowania produktów ziarnistych wymaga się coraz większej precyzji w ich ocenie na podstawie oznaczanych parametrów jakościowych. Skoro rosną wymagania dla dokładności w przedstawianiu jakości wspomnianych produktów, ważne jest opracowanie metod ich racjonalnej oceny. Aby miarodajnie i oszczędnie oznaczać średnią jakość produktów ziarnistych, podstawą procedur estymacyjnych muszą być naukowe rozwiązania [1, 4, 11, 24]. Korzystając z prac naukowych, jako podstawy postępu w estymacyjnych procedurach koniecznych dla produktów ziarnistych, można w praktyce właściwie zastosować zalecane w nich rozwiązania z użyciem metod statystycznych w takich przypadkach jak kontrola zdawczo-odbiorcza lub kontrola procesów produkcyjnych.

Praktyczne potrzeby wymuszają doskonalenie procedur estymacyjnych, w celu bardziej wiarygodnego oznaczania średnich parametrów jakości w partii produktu ziarnistego. Pod pojęciem *procedura estymacyjna* rozumie się instrukcje dotyczące podziału toku postępowania na stadia oraz zasad ich realizacji. W celu uzyskania porównywalności badań, należy ujednoczyć zasady będące podstawą określania liczby próbek pierwotnych pobieranych z produktu i tworzenia z nich odpowiednich próbek, kierowanych do następnego stadium procedury, sposobu przygotowania próbek, aż do otrzymania próbki analitycznej oraz wskazać znormalizowaną metodę oznaczania estymowanego parametru jakościowego. Konieczne jest zwrócenie szczególnej uwagi na dobór sposobu badania wrywkowego, stosowanego w celu pozyskania danych o jakości produktów surowych i ogólnie biorąc takich, które charakteryzują się dużym odchyleniem standardowym właściwości.

W przypadku produktów ziarnistych, istotnym problemem jest niejednoznaczność pojęcia populacji generalnej, spowodowana możliwością zdefiniowania różnych jednostek populacji dla tej samej partii produktu ziarnistego. Gdy oznacza się wiele parametrów jakościowych szczególne znaczenie ma osiągnięcie stopnia niepewności wyników oznaczania, który ich nie dyskwalifikuje jako za mało wiarygodne. Ogólnie biorąc przyczyny, które utrudniają dokładne estymowanie właściwości materiałów ziarnistych, są skomplikowane. Trzeba więc je uwzględnić, opracowując odpowiednią procedurę estymacyjną, dostosowaną do rezultatów statystycznej

are the unhomogeneous and very variable materials with regard to quality. To sink in the causes of their variability, requires in individual cases the knowledge of production process and the attributes which commonly present the product quality and what is the general population as a population of increments in the capacity of statistical units.

In news technologies of production and use of particulate products there is pushed for more and more preciseness in evaluation of them on the basis of the specific characteristics being determined. Thus, as the general demand for quality exactitude of these products increases, it becomes important to investigate the methods of reasonable evaluating for them. In order to reliably and economically determine the average quality of particulate lot, the rational principles and solutions [1, 4, 11, 24] have to be the basis of estimation procedures. They enable in practice to properly apply the recommended statistical methods, for instance in such cases as the acceptance inspection or production process control, and are to be the fundamental of progress on the field of estimation procedures for quality of particulate lots.

The practical needs bring about the necessity to perfect all the estimation procedures in the aim of more reliably determination the characteristic averages to be tested on a particulate material lot. The term *estimation procedure* means: first, the operational instructions relating to division of procedural arrangement into separate stages and second, the principles for realization of them. To obtain the comparability of findings, it is desirable in order to uniform the rules of establishing the number of increments taken from a lot, composing of them the sample or samples which are required into the next sample preparation stage, and sample preparing as far as obtaining the last sample to test and, in addition, to point at the references to standards how to determine the needed specific characteristics. In particular, it is necessary to appreciate correctness of acceptance sampling schemes and procedures for the inspection of particulate products which are raw or unrefined, generally, particulates characterize by plenty of dispersion in quality.

In the case of particulate products, the essential matter is non synonymity of the term general population. It is consequent on possibility of defining a number of different sampling units for the same lot of particulate products. Other important point of interest here is that if many properties are determined, the magnitude of uncertainty of determination results must not bring about disqualification of them as unreliable. In general, the causes which decrease precision of estimates, are very complicated. They are allowed for elaborating an adequate estimation

analizy populacji generalnej przyporządkowanej produktowi ziarnistemu oraz zasad wielowymiarowej i wektorowej estymacji, przedstawionej w publikacjach autora [6, 12, 13, 15, 16]. Przyjmując ją jako podstawę estymowania jakości produktów ziarnistych, należy też uwzględnić kryterium ekonomiczne, biorąc pod uwagę bilans strat wynikających z estymacyjnej niepewności wyników oznaczania, które przedstawiają jakość produktu ziarnistego [20, 23] i kosztów badania, będących funkcją tejże niepewności.

Praca zawiera ogólne wytyczne jak doskonalić estymacyjne procedury stosowane w badaniach wyrywkowych produktów ziarnistych, których jakość jest przedstawiona w sposób wielowymiarowy lub wektorowy. Główną zasadą, mającą podstawowe znaczenie, jest znajomość poziomu reprezentatywności wielowymiarowych i wektorowych estymatorów tak określonej jakości produktu, a zatem i wyników jej oznaczania.

2. Produkt ziarnisty jako populacja jednostek statystycznych

Pojęcie *populacja jednostek statystycznych produktu ziarnistego* dotyczy jego partii, która ma być badana, to znaczy konkretnej ilości produktu, jako przedmiotu badania i oceny określonych jego właściwości.

Naturalne jednostki produktu ziarnistego, którymi są poszczególne ziarna, nie mogą być jednostkami losowania z uwagi na ograniczenia praktyczne. Ziarna te są pobierane z produktu przez próbobiorniki w postaci próbek pierwotnych. Tylko takie próbki są jednostkami nadającymi się do losowego opróbowania produktu ziarnistego. Rozmiary próbobiorników i co za tym idzie — wielkości próbek pierwotnych są zależne od rozmaitych warunków. Mogą one być regulowane tylko w granicach, które są możliwe w praktyce. Wielkość próbki pierwotnej będąca efektem szczególnych naturalnych i technicznych warunków, określa populację generalną, utworzoną w ten sposób w partii produktu ziarnistego. Tak więc próbki pierwotne są jednostkami o umownej wielkości, które tworzą populację generalną i wobec tego *populacja generalna produktu ziarnistego* również jest pojęciem umownym.

Próbki pierwotne są elementarnymi jednostkami, w których zbiorze można określić zmienność jakości w produkcie ziarnistym, odpowiadającą tymże jednostkom. Zmienność właściwości istniejąca w populacji próbek pierwotnych, interpretowana jako niejednorodność produktu, ma wpływ na precyzję estymatora jej wartości średniej, występującej w tym produkcie. Poziom tejże zmienności zależy między innymi od wielkości próbki pierwotnej. Jego wskaźnikiem jest odchylenie standardowe parametru

procedure. The point of departure is statistical analysis of general population for which specific characteristic are to be determined, and the principles of multidimensional and vectorial estimation theory being inserted in author's publications [6, 12, 13, 15, 16]. It is recommended to establish the economical criterion for the specified product, considering the balance of losses consequent on the uncertainty of determination results [20, 23] and the determination cost agreeing with the presupposed value of uncertainty.

This paper contains the general recommendations how to perfect the estimation procedures for sampling of particulate products, quality of which is to be multidimensional or vectorial expressed. The essential principle being of fundamental consequence is to know the reliability of every multidimensional or vectorial estimate representing the characteristics of lot quality as the amount of its closeness or statistical approximation.

2. Particulate product as a population of statistical units

The notion *a particulate product population of statistical units* concerns a particulate product lot is to be tested, that is, some specified quantity of particulate product which is the subject of evaluation on the basis of its specific characteristics appointed for determination.

The natural unit of particulate material is every individual particle which can not however be taken into consideration as the random sampling unit with respect to practical impediments. The product particles are taken from a particulate product lot in shape of increments by the sampling devices. Only such increments are the units apt for random sampling from a lot of particulate material. It is well-known that diverse conditions are influenced over an extent of sampling device and accordingly the increment size. The increment sizes are real within the practically possible limits only. The size of increment, which is consequent on the local natural and technical conditions, is the statistical unit that determines the general population of a lot. Therefore, the increments are the conventional units, then the particulate lot population of such units is also the conventional population and the term *general population of lot* is a conventional notion too.

The increments are statistical units, on population of them, one is determined the variability of lot quality and its amount corresponds to the increment size. The amount of this variability is interpreted as a measure of product unhomogeneity, influences the estimate precision of the lot average values of the specific characteristics considered. The increment size is one of factors forming the amount of in-

jakości, istniejące pośród próbek pierwotnych jako jednostek, które tworzą populację generalną w badanej partii produktu. Na ogół zależność między wielkością próbek pierwotnych i wariancją w ich populacji jest bardzo skomplikowana. Jak wykazano [14, 18, 19] zależność tę kształtuje poziom losowości rozlokowania w populacji próbek pierwotnych ziarn, które są naturalnymi indywidualnymi jednostkami w materiale ziarnistym. Jest rzeczą oczywistą, że znaczna ilość ziarn, które znajdują się w jakiegokolwiek próbce pierwotnej, nie wchodzi w jej skład całkowicie przypadkowo. Proporcja ziarn wchodzących przypadkowo w skład próbek pierwotnych — do ziarn, które dostały się do nich nielosowo, jest różna w rozmaitych uwarunkowaniach i okolicznościach. Dodatkowym utrudnieniem matematycznego przedstawienia rozważanej zależności jest obecność w produkcie ziarnistym ziarn różniących się wielkością, to jest objętością lub masą, które nie są jednostkami statystycznie równoważnymi. Dlatego też umownie określa się w produkcie ziarnistym statystycznie równoważne jednostki elementarne, lecz poziom losowości ich rozmieszczenia w próbkach pierwotnych jest kształtowany między innymi przez wzajemne proporcje zawartości statystycznie nierównoważnych ziarn.

Jeżeli wszystkie statystycznie równoważne jednostki elementarne rozłożyłyby się w próbkach pierwotnych losowo, zgodnie z teorią zmiennych losowych [2, 3, 5, 9], byłaby prawdziwa następująca zależność funkcyjna między wariancją właściwości v_i w populacji generalnej próbek pierwotnych, a wariancją właściwości v_u w populacji generalnej wspomnianych jednostek losowania

$$v_i = \frac{v_u}{n_{u/i}}$$

przy czym $n_{u/i}$ jest to liczba umownych jednostek z populacji scharakteryzowanej wariancją v_u , które znajdują się w każdej z próbek pierwotnych, należących do ich populacji.

W rzeczywistości niektóre elementarne jednostki dostają się do próbek pierwotnych przypadkowo, inne zaś pod wpływem przyczyn, których efekty są przewidywalne. Ich rozmieszczenie w próbkach pierwotnych jest więc w części losowe, a w części nielosowe. Istniejącą wówczas zależność można aproksymować za pomocą teoretycznego wzoru [14, 18, 19]

$$v_i = \frac{v_u}{(n_{u/i})^{r(n)}}$$

w którym $r(n)$ jest to miernik poziomu przypad-

crement differentiation. The standard deviation of property values differentiated among increments as the units of lot general population, is an index to express magnitude of the product quality dispersion. In general, the dependence between the increment size and the variance in increment population, is very complicated. As has pointed out [14, 18, 19], one of the factors that shapes it, is the randomness participation in the distribution of material particles into all the lot increments. It is a matter of course that a great many of lot particles being found in ever increment is not placed inside each by quite random. The proportion of the particles being placed by random to the particles being placed by non random inside increments, is different under diverse circumstances or factors. If any particulate material is composed of particles differing of each other by size, such particles are not the statistically equivalent units. This occurrence makes additionally considerably intricacy to mathematically show the considered dependence. To simplify its mathematical model, is possible if one assumes specified conventional sizes for the elementary units of statistically equal rank within the particulate material. The share of randomness in appearance of such units inside increments, is partially depended on the proportion of material particles statistically inequivalent of each other.

If all the statistically equal rank elementary units of particulate material are distributed inside the increments by random, according to the theory of random variables [2, 3, 5, 9], the consequential following mathematical dependence between the property variance v_i in the increment general population and the property variance v_u in the general population of these units, is true

where $n_{u/i}$ is the number of conventional units of population in which the variance is equal to v_u , being contained inside a single increment.

In the reality, some elementary units enter into increment composition by random and others under the influence of causes whose effects are not accidental. Then part of them is placed random and others are not random placed inside increments, in consequence their distribution is solely partially random. For such a case, the true mathematical relationship is approximated by the theoretical dependence [14, 18, 19] below stated

in which $r(n)$ is a measure in what degree is causal

kowości w rozmieszczeniu umownych jednostek elementarnych w populacji próbek pierwotnych, zawierających po n tychże jednostek.

Przytoczone rozważania są uzasadnieniem dla tego nie jest wystarczająca sama znajomość odchylenia standardowego danej właściwości w populacji umownych jednostek elementarnych o masie m_e lub w populacji próbek pierwotnych o masie m_a , aby obliczyć odchylenie standardowe odpowiadające populacji, w której masy próbek pierwotnych są równe m_b .

Poznanie jak wpływają rozmaite okoliczności na wartość liczbową wskaźnika $r(n)$, która ostatecznie jest rezultatem proporcji losowych i nielosowych czynników mających udział w kształtowaniu zawartości próbek pierwotnych, nie jest możliwe bez przeprowadzenia badań niezbędnych dla danego produktu ziarnistego. Wzmiankowana proporcja, która teoretycznie może być zależna od liczby n , zmienia się między dwiema skrajnymi wartościami liczbowymi, przy czym jedna z nich odpowiada całkowitemu brakowi przypadkowości, druga zaś zupełnej przypadkowości rozmieszczenia elementarnych jednostek produktu ziarnistego w próbkach pierwotnych. W praktyce z reguły spotyka się wartości pośrednie.

Gdyby więc była znana liczbowa wartość wskaźnika $r(n)$ oraz wariancja międzyziarnowa v_p nie byłoby potrzebne oznaczanie wariancji międzypróbkowej v_i w celu obliczenia statystycznego przybliżenia estymatora średniej wartości parametru jakości partii produktu ziarnistego.

3. Właściwości produktu ziarnistego informujące o jego technologicznej charakterystyce i przydatności

Produkty ziarniste na ogół charakteryzują się dużą liczbą różnorodnych właściwości. W celu określenia ich przydatności i technologicznych właściwości oznacza się i ocenia parametry jakościowe nie tylko produktu jako całości, lecz również jego zasadniczych składników (komponentów). Przeważnie parametry te są niezależne od siebie. Gdy wymaga się oceny jakości wielu komponentów, pożądana informacja o produkcie ziarnistym może składać się z dużej liczby wskaźników jakości. Ich zestawienie jest jego charakterystyką, według której decyduje się o jego przydatności i technologiach zapewniających jego najlepsze wykorzystanie.

Wszelkie charakterystyki jakości produktów ziarnistych zawsze mogą być estymowane przy zastosowaniu pobierania próbek, a tylko niektóre z nich przy zastosowaniu techniki pomiarów ciągłych. Dlatego też bardzo ważna jest maksymalizacja dokładności estymacyjnej w badaniach wyrwykowych. Podstawową sprawą jest potrak-

or random the distribution of the specified elementary units within the lot population of increments when each of them contains n these units.

The quoted deliberations are the substantiation why having only the knowledge of the property standard deviation in the population of conventional units with the mass equal to m_e or in the population of increments with the mass equal to m_a , one is not sufficient to count of the standard deviation for the lot population of increments with the mass equal to m_b .

To explain the influence of various conditions over a value of the $r(n)$ index being made dependent on the proportion of random and nonrandom factors involving to form the particle contents of increments, it is needed carrying out the necessary research plan for the several particle product. This proportion, which, theoretically, can be depended on the number of n , varies between both extremal limits. The first of them corresponds with the random absence, the second pertains to the random completeness for localization of material elementary units into increments. However in practice, the middle values appear in the main.

Then, if the value of $r(n)$ index and the value of inter-particle variance v_p were known, it would not be necessary to determine the inter-increment variance v_i in the aim to calculate the statistical approximation for the estimate of the property lot average value.

3. The properties of particulate material for presentation its technological usefulness and availability

The particulate products, as a rule, are characterized by a large number of heterogeneous properties. In order to know their technological usefulness and availability, it is not only determined and evaluated some specific characteristics on a lot in shape of blend of their components but in addition to on its essential components. The characteristics of diverse properties, which demonstrate the quality of the product lot and/or one or many of product components, are mostly irrespective of each other. In numerous cases, it is required to evaluate the quality of many components, and in connection with it, the wanted information on any particulate product is consist of a large number of specific characteristics. The set of them is the information according which it is made a decision about the availability of evaluated product and the technologies assuring its best utilization.

All the specific characteristics of particulate products can be always estimated by sampling and some of them by the on-line technics only. For that reason, perfecting the estimation method for sampling and

towanie estymowanych parametrów jakościowych jako jednej całości estymacyjnej. W zależności od zakresu badań, estymator badanych parametrów jakościowych należy do odpowiedniego rodzaju zmiennych losowych.

Gdy oznacza się:

- a) jedną właściwość w całości produktu, jej estymator i zmienna losowa w populacji jednostek losowania są jednowymiarowe,
- b) więcej niż jedną właściwość w całości produktu, jej estymator i zmienna losowa w populacji jednostek losowania są wielowymiarowe,
- c) jedną lub więcej właściwości w jednym lub więcej komponentach produktu, ich estymator i zmienna losowa w populacji jednostek losowania są wektorowe.

Próbki ogólne są estymatorami składającymi się z próbek pierwotnych, jako jednostek losowania. W celu poznania statystycznego przybliżenia próbki ogólnej, trzeba oznaczyć badane parametry jakościowe w wystarczająco dużej liczbie przypadkowych próbek pierwotnych.

4. Stadia w procedurze służącej do estymacji parametrów jakości produktu ziarnistego

Specyfika produktów ziarnistych powoduje konieczność stosowania odpowiednich, niekiedy bardzo skomplikowanych procedur, umożliwiających oznaczenie ich jakości. W procedurach tych wyodrębniają się stadia otrzymywania kolejnych estymatorów. Ostatnim z nich jest wynik oznaczania, reprezentujący średnią jakość partii produktu ziarnistego, przeważnie wyrażaną i ocenianą wielowymiarowo lub wektorowo. Kolejne stadia procedury estymacyjnej zazwyczaj są następujące:

- pierwsze stadium to pobieranie próbek pierwotnych z badanego produktu ziarnistego,
- następne stadia to każdorazowe pomniejszanie (redukcja ilości) próbki, aż do otrzymania jednej lub więcej próbek analitycznych, ta część procedury estymacyjnej nazywa się przygotowaniem próbek,
- ostatnie stadium to analiza laboratoryjna i pomiary obejmujące część lub całą próbkę analityczną.

Pobieranie próbek jest najtrudniejszym i najważniejszym stadium w rozważanej procedurze estymacyjnej. Istotnym warunkiem jest, że w całej ilości produktu szansa pobrania próbki musi być stała. Konieczne jest zabezpieczenie losowego pobierania próbek pierwotnych z partii produktu ziarnistego. Losowość pobierania próbek powinna być potwierdzona za pomocą testu losowości [5, 7], który należy ponowić gdy warunki jej za-

increasing its precision, is very weighty. A matter of consequence is to take into consideration the whole determined specific parameters as one estimation entirety. In dependence of the determination scope, the estimate of examined characteristics is an adequate kind of random variable.

When it is determined:

- a) one specific characteristic of blend, its estimate and the population random variable are one-dimensional,
- b) more than one specific characteristic of blend, their estimate and the population random variable are multi-dimensional,
- c) one or more specific characteristics of one or more blend components and the a) and b) may also be, their estimate and the population random variable are vectorial.

A gross sample is the estimate consisting of increments as the sampling units. In order to know the statistical approximation of such a sample, the examined specific characteristics have to be determined on the sufficiently great number of random taken increments.

4. The stages of estimation procedure to determine the specific characteristics of particulate material

Specificity of particulate materials is the reason of necessity to apply the proper, sometimes very complicated, procedures making possible to determine their quality. In these procedures there are singled out the stages in order to obtain the successive estimates. The last of them is the determination result as representative of the average quality of a lot, mostly expressed and evaluated multidimensionally or vectorially. The successive stages of an estimation procedure for determination the average quality of a lot are usually as follows:

- the primary stage is to take increments from the lot tested,
- the next stages are the operations connecting with each sample division on the way to the end as obtains one or a number of test samples; this part of estimation procedure is termed sample preparation,
- the last stage is the laboratory analysis and measurements on the whole quantity of test sample or a part of it.

Taking of increments is the most difficult process and the most important stage in the considered estimation procedure. The essential condition is to ensure an equal probability of being selected as an increment for all parts of the material in the lot and to take of increments at random from it. Randomness of sampling should be proved by the test for randomness [5, 7] at the beginning and again if

pewnienia ulegną zmianie. Są to podstawowe zasady otrzymania reprezentatywnych próbek produktów.

Przygotowanie próbek powinno być etapem, w którym do minimum ograniczono związany z nim przyrost niedokładności próbki. W przypadku kopalni stałych, zwłaszcza zaś próbek węgla, przeważnie występują dwa podstawowe stadia w przygotowaniu próbki (próbek) analitycznej (analitycznych) z próbki ogólnej. Pierwszym z nich jest jej pomniejszenie do jednej lub więcej próbek laboratoryjnych. Drugim jest pomniejszenie próbki laboratoryjnej do jednej lub więcej próbek analitycznych.

Stadium oznaczania parametrów jakościowych w próbce analitycznej przeprowadza się, korzystając z istniejących w tym zakresie norm czynnościowych lub innych przyjętych dokumentów.

Nacisk na polepszanie teoretycznych podstaw oraz metod estymacji średniej jakości charakteryzującej partię produktu ziarnistego, zapewniających pożądaną dokładność wyniku oznaczania, ma zasadnicze znaczenie dla przyspieszenia oczekiwanego w tym zakresie postępu. Polega on na uzyskaniu w toku kolejnych czynności, zmierzających do otrzymania końcowego rezultatu oznaczania jakości produktu ziarnistego – takiego przybliżenia estymatorów liczbowych wartości właściwości do ich rzeczywistych wartości liczbowych, jak jest to aktualnie praktycznie możliwe. Oczywiście zalecane w tym celu metody powinny być wybrane ze względu na ich łatwość w zastosowaniu i efektywność.

5. Estymatory używane do reprezentowania rzeczywistych wartości liczbowych właściwości produktów ziarnistych

Tak ilość (to jest próbka) produktu ziarnistego, która reprezentuje jego partię, jak i wynik oznaczania jej parametru lub zestawienie wyników oznaczania jej parametrów jakości, są estymatorami jednej (jednowymiarowym) lub więcej (wielowymiarowym bądź wektorowym) właściwości, których wartości liczbowe wskazują poziom lub kategorię jakości tego produktu. W teorii badań statystycznych metodą reprezentacyjną podstawowe znaczenie ma zasada znajomości precyzji charakteryzującej każdy estymator [8, 10]. Zasada ta, która jest rekomendowana od dawna, dotychczas nie została wdrożona w praktyce estymowania jakości produktów ziarnistych.

Rozważana precyzja estymatora jest interpretowana w szerszym znaczeniu, jako *statystyczne przybliżenie estymatora*. Ilościowa jego znajomość jest podstawą, która musi być uwzględniona w opróbowaniu materiałów ziarnistych. Zamierzając posłużyć się estymatorami odpowiednimi dla danej partii produktu ziarnistego, należy określić charakter zmien-

the conditions effecting it, will be changed. These principles are fundamental in order to obtain the estimable samples of product.

In sample preparation it is restricted to minimum the increase of sample inaccuracy arising during this procedural part. The number of stages in sample preparation is equal to the number of operations of sample division realised in the purpose of obtaining one or more test samples from the primary sample size. In the case of mineral products, especially with respect to a gross sample of coal, there often are in the main two operational compounds as essential to prepare test sample. The first of them is reduction of gross sample into one or more laboratory samples. The second of them is reduction of laboratory sample into one or more test samples.

The stage of determining the listed specific characteristic on a test sample is realised by reference to a standard or another regulation.

A demand of primary importance is to bring to perfection the substantial models and operations of estimation methods. It is indispensable to accelerate the expected progress on the field. The aim is to obtain, as nearly as actually practicable, the closeness of agreement between the values of the characteristic estimates and the true values of the lot characteristics. Apparently, the recommended methods are to be applied, should be evaluated and selected with regard to their availability and efficiency.

5. The estimates used to represent the true values of the specified properties of particulate products

As a little quantity (this is a sample) of particulate material, which is to represent a lot, as a result or some results of determination of its properties, which is or are to represent quality of a lot, both the first and second case are the estimates of one (one-dimensional) or more (multidimensional or vectorial) specific characteristics pointing at the level or category of product quality. In the estimation theory there is a general principle to know the precision which characterizes every estimate [8, 10]. This principle has even so been for a long time knowing, has not yet involved in practice to estimate the quality of particulate products.

The considered estimate precision is, in more general interpretation, termed *the statistical approximation of estimate*. Knowledge of its amount, is the cardinal fundamental which has to be taken into consideration in sampling of particulates. On the basis of the specification of the properties which are to be determined on any particulate product and its components, it is necessary to recognize the kind of

nej losowej w oparciu o zestawienie jej oznaczanych parametrów jakości oraz uzasadnić celowość zastosowania teorii estymacji wielowymiarowych i wektorowych zmiennych losowych [1, 3, 4]. Praktyczne aspekty i wskazówki dotyczące rozwiązania tego zagadnienia zawierają publikacje [6, 7, 15, 16, 17, 21, 22] obejmujące problematykę metody wielowymiarowej i wektorowej estymacji jakości produktów ziarnistych. Statystyczne przybliżenie estymatora ocenia się według kryterium adekwatnego do zbioru oznaczanych właściwości oraz do kolejnych stadiów procedury estymacyjnej.

Precyzja wyniku oznaczania, a więc estymatora z ostatniego stadium procedury estymacyjnej, jest wypadkową poszczególnych precyzji osiąganych w kolejnych jej stadiach, ponieważ powstające w nich niedokładności kumulują się. Wynikają one z redukcji ilości materiału, reprezentującej partię produktu oraz błędów pomiarowych w analizie laboratoryjnej. Ich wzajemne relacje powinny być przedmiotem analizy i oceny jakie jest ich znaczenie w miarodajności charakteryzującej wynik oznaczania.

Próbka będąca estymatorem parametrów jakości produktu lub jego reprezentatywnej ilości — wydzielonej w poprzednim stadium redukcji masy próbki, może być otrzymana w dowolnym stadium przez pobranie z określonej dla tego stadium populacji elementów — jednego lub więcej elementów. Estymatory z poszczególnych stadiów mogą więc być jedno lub wieloelementowe.

Próbka ogólna składająca się z próbek pierwotnych jest estymatorem wieloelementowym.

Próbka laboratoryjna i próbka analityczna w zależności od stosowanej procedury może być przygotowana jako estymator jedno lub wieloelementowy.

Wynik oznaczania parametru jakości w próbce analitycznej z reguły jest estymatorem dwuelementowym.

Dane przedstawiające statystyczne przybliżenie estymatora są następujące:

1. prawdopodobieństwo P danej różnicy lub różnic między prawdziwym parametrem lub parametrami jakości w populacji generalnej, określonej w partii produktu ziarnistego, a odpowiednimi parametrami estymatora,
2. liczbowa wartość różnicy Δ lub liczbowe wartości różnic Δ_i , którym odpowiada prawdopodobieństwo P .

Gdy różnice te służą do oceny dokładności estymatora, nazywają się jego odchyleniami.

Statystyczne przybliżenie estymatora jest miarą jego wiarygodności, jako reprezentanta badanego produktu. Rozbieżność pomiędzy estymatorem, a rzeczywistą wartością liczbową właściwości produktu, występująca w kolejnych estymatorach otrzy-

random variable and to substantiate suitability to involve the statistical theory of multidimensional and vectorial random variables [1, 3, 4] in designing to make use of proper estimates for the specified lot. For particulate materials to further the indispensable development on that scope, the extended theoretical base and general guidance for the application of the method of multidimensional and vectorial estimation has been elaborated [6, 7, 15, 16, 17, 21, 22]. The criterion according to which, it is performed the evaluation of estimate precision, is adequate to the set of determined characteristics and the number of procedural stages.

The precision of determination result that is the estimate at the last stage of estimation procedure, is the cumulative effect of precision components attained at each of individual procedural stages. The relative magnitude of these components should be studied to recognize what is their influence the credibility of the determination result. The sample singled out at a stage, is biased by some inaccuracy characterizing this stage. This inaccuracy corresponds with reduction of material quantity being the representative of a particulate lot, and measurement errors in laboratory analysis.

A sample as the representative of the product lot or its representative quantity separated in the preceding stage of sample mass reduction, is the estimate of their quality characteristics. This may be obtained at a stage by taking from unit population a single unit or a number of units. The stage estimates may then be in shape of single element or composed of a number of elements.

A gross sample being composed of a number of increments is a multielement estimate.

A laboratory or test sample in dependence on the applied preparing procedure may be prepared as either an single element estimate or a multielement estimate.

A property determination result obtained on a test sample is, as a rule, a two-element estimate.

The data to indicate the statistical approximation of estimate are given by:

1. the probability P of the specified difference or differences between the true value or values of property or properties of increment population and the adequate value or values of estimate,
2. the difference Δ or differences Δ_i for which the probability P is assigned.

When the precision of estimate is evaluated, these differences are termed the deviations of estimate.

Statistical approximation of estimate is a measure its reliability as the representative of a lot examined. Closeness of agreement between the estimate and true value of material specific characteristic is worse and worse for the successive estimates obtained after

mywanych z poszczególnych stadiów procedury estymacyjnej ciągle rośnie w miarę redukcji ilości materiału reprezentującego badany produkt i sumowania się błędów pomiarowych. Z tego względu znajomość uszeregowania odchyleń charakteryzujących wspomniane stadia, obniżających precyzję estymatora jest bardzo ważna. Problem ten jest rozważany dalej na przykładzie procedury obejmującej następujące główne stadia:

- pobieranie próbek pierwotnych do próbki ogólnej,
- przygotowanie próbki laboratoryjnej z próbki ogólnej,
- przygotowanie próbki analitycznej z próbki laboratoryjnej,
- pomiary parametrów w naważce z próbki analitycznej lub w całości próbki analitycznej.

Wynik oznaczania jest funkcją odchyleń wszystkich estymatorów z poprzedzających go stadiów. Poniżej zamieszczono matematyczne modele odchyleń kolejnych estymatorów występujących w procedurze estymacyjnej.

6. Matematyczne modele do obliczania dokładności estymatorów reprezentujących właściwości produktów ziarnistych

Symbole zastosowane w przytoczonych wzorach:

- Δ — odchylenie estymatora,
- P — prawdopodobieństwo realizacji odchylenia lub odchyleń obciążających jedno lub więcej wymiarowy estymator,
- L — liczba oznaczanych właściwości w produkcie ziarnistym oraz/lub w jego wskazanych komponentach (składnikach),
- M — liczba komponentów produktu ziarnistego,
- s — odchylenie standardowe zmiennej losowej cechującej populację generalną próbek pierwotnych w partii produktu ziarnistego,
- i — liczba porządkowa właściwości ($1 \leq i \leq L$),
- j — liczba porządkowa komponentu produktu ziarnistego ($1 \leq j \leq M$),
- P_{ij} — prawdopodobieństwo realizacji odchylenia Δ_{ij} dla estymatora i -tej właściwości j -tego komponentu,

- n — liczba jednostek populacji, tworzących estymator,
- t — współczynnik ufności dotyczący rozkładu zmiennej losowej,

symbole identyfikujące stadium procedury estymacyjnej:

ever next stage of estimating procedure according as the product quantity representing the lot is reduced and errors of measurements are added. Therefore, it is weighted to know the relative order of magnitude of stage deviation depreciating the exactitude of estimate. The problem of knowledge of the representativeness in relation to the average quality of the lot tested is considered for instance of the procedure being composed of the following principal stages:

- taking increments to aggregate a gross sample,
- preparing a gross sample to separate one or more laboratory samples,
- preparing a laboratory sample to separate one or more test samples,
- making measurements on a test sample to be employed by use either a part (portion) of it or its whole quantity.

A result of property determination is a function of the estimate deviations of all the previous stages involved in an estimating procedure. Below, it is exhibit the mathematical models of deviations for the consecutive stage estimates.

6. Some mathematical models to count the precision of estimates which represent the quality characteristics of particulate materials

The symbols used in the demonstrated formulas:

- Δ — the estimate deviation,
- P — the probability of realization for the deviation or deviations of one or more dimensional estimate,
- L — the number of properties to be determined on a lot and/or its specified constituents (components),
- M — the number of lot constituents,
- s — the standard deviation of the random variable on the increment general population of a lot,
- i — the ordinal number of property, ($1 \leq i \leq L$),
- j — the ordinal number of lot constituent, ($1 \leq j \leq M$),
- P_{ij} — the probability of realization for the deviation Δ_{ij} of the estimate of i -th characteristic on j -th constituent,

- n — the number of population units composing an estimate,
 - t — the score of random variable distribution,
- the symbols to identify a stage of estimation procedure:*

$$P_{ij} = f(P, L) = P \left(\sum_j L_j \right)^{-1}$$

g — stadium pozyskiwania próbki ogólnej,
l — stadium przygotowania próbki laboratoryjnej,
a — stadium przygotowania próbki analitycznej,
d — stadium laboratoryjnych analiz i pomiarów,
u — próbka pierwotna jako jednostka losowania.
Matematyczne modele odchyień [21] dotyczących:
 – próbki ogólnej

g — the stage to aggregate a gross sample of lot,
l — the preparing stage to separate a laboratory sample,
a — the preparing stage to separate a test sample,
d — the stage of laboratory analysis and measurements,
u — the increment as sampling unit.
The mathematical models of deviation [21] for:
 – a gross sample

$$(\Delta_{ij})_g = \frac{t(P_{ij})(S_{ij})_u}{\sqrt{n_u}}$$

– próbki laboratoryjnej

– a laboratory sample

$$(\Delta_{ij})_l = t(P_{ij})\sqrt{(S_{ij})_g^2 + (S_{ij})_l^2}$$

– próbki analitycznej

– a test sample

$$(\Delta_{ij})_a = t(P_{ij})\sqrt{(S_{ij})_g^2 + (S_{ij})_l^2 + (S_{ij})_a^2}$$

– wyniku oznaczania właściwości z n_d naważek próbki analitycznej, reprezentującego średnią właściwość partii produktu

– a property determination result of n_d outcomes of test sample, which shows the product average value of lot

$$(\Delta_{ij})_d = t(P_{ij})\sqrt{(S_{ij})_g^2 + (S_{ij})_l^2 + (S_{ij})_a^2 + \frac{(S_{ij})_d^2}{n_d}}$$

7. Niepewność wyników oznaczania będących wielowymiarowym lub wektorowym estymatorem średnich parametrów jakości partii produktu ziarnistego

Jeżeli jednowymiarowe odchylenie estymatora wynosi Δ , różnica między liczbową wartością estymatora i estymowaną wartością rzeczywistą, będąca zmienną losową, może zostać zrealizowana w zakresie wartości liczbowych mniejszych lub co najwyżej równych Δ z prawdopodobieństwem P , któremu liczba Δ jest przyporządkowana. Wartości liczbowe tej różnicy większe niż Δ realizują się z prawdopodobieństwem P_{un} równym $1 - P$. A zatem Δ jest wartością liczbową graniczną, oddzielającą zakres liczbowy rozważanej różnicy, przyporządkowany prawdopodobieństwu P , od zakresu liczbowego przyporządkowanego prawdopodobieństwu $1 - P = P_{un}$. Wobec tego prawdopodobieństwo P_{un} jest miernikiem niepewności związanej z możliwością, że w rzeczywistości wspomniana różnica jest większa niż ustalone odchylenie graniczne, równe Δ . Każdy wynik oznaczania parametrów jakości produktu ziarnistego jest obarczony niepewnością, której poziom zależy od różnych okoliczności [23].

7. Uncertainty of determination results being the multidimensional or vectorial estimate of the average quality of a particulate product lot

As known, when the one-dimensional deviation of estimate amounts to Δ then the difference between a estimate value and the lot true value, which is the random variable, may be realised into the scope of minor values than Δ or equal to it at the most, at the probability P on which the Δ has been calculated. The values of this difference are larger than Δ , realise at the probability P_{un} equal to $1 - P$. Therefore, the deviation of Δ is the limit value indicating the scope of values corresponding with the probability P and the scope of values corresponding with the probability equal to $1 - P = P_{un}$. Consequently, the probability P_{un} is a measure of uncertainty consisting in the possibility that the considered difference is indeed larger than the assumed limit deviation equal to Δ . Every determination result of a particulate material property is characterized by its uncertainty, the amount of which is a function the known circumstances [23].

Gdy w tych samych próbkach oznacza się dwie lub więcej właściwości potrzebnych do oceny produktu ziarnistego oraz/lub jego komponentów czy komponentu, odchylenie Δ_{ij} dowolnej właściwości estymatora, odpowiada prawdopodobieństwu jego realizacji P_{ij} . Prawdopodobieństwa odchyłeń wszystkich oznaczanych parametrów jakościowych wspólnie kształtują łączne prawdopodobieństwo oznaczone symbolem P_w , które dotyczy jakości produktu, określonej przez ogół estymowanych parametrów. Jeżeli parametry te są od siebie niezależne, według teorii prawdopodobieństwa [3, 9], prawdopodobieństwo P_w jest iloczynem

$$P_w = \prod_i \prod_j P_{ij}$$

Co najmniej jedno odchylenie wartości parametru ze wszystkich odchyłeń wartości parametrów wielowymiarowego lub wektorowego estymatora może w rzeczywistości przekroczyć zakładane graniczne odchylenie, to znaczy tolerancję estymacyjną – z prawdopodobieństwem $(P_w)_{un}$ równym $1 - P_w$. A zatem zestawienie wszystkich oznaczanych parametrów jakościowych jest obarczone niepewnością, której miernikiem jest prawdopodobieństwo $(P_w)_{un}$.

W miarę powiększania się liczby parametrów jakości, które uzyskuje się z próbki, jest łatwo zauważalne obniżanie się wiarygodności ich zestawienia. Zależność ta jest prawdziwa dla stałej liczby jednostek populacji, tworzących estymator. Chcąc utrzymać taką samą niepewność dla zestawień parametrów jakości produktu, zawierających różne ich liczby, należy odpowiednio zmieniać liczby jednostek populacji, z których utworzony jest estymator. Jest to możliwe tylko w przypadku estymatorów wieloelementowych. Warunkiem postępu w metodzie estymacji jakości produktów ziarnistych jest uwzględnienie oczywistej prawdy, że na niepewność zbioru wyników reprezentujących jakość produktu mają wpływ nie tylko duże odchylenia standardowe właściwości ale również ich liczba określająca jego jakość.

8. Problem wymagań dla przybliżeń cechujących estymatory

Przeprowadzona analiza teoretyczna wskazuje, że ilość i struktura informacji pozyskiwanych z próbki produktu kształtują stopień niepewności, który cechuje zestawienie wyników oznaczania, obrazujące jego jakość. Z drugiej strony wiadomo, że rozważana niepewność wiąże się z precyzją danego estymatora parametrów jakościowych produktu ziarnistego.

Obecne metody estymacji parametrów jakości produktów ziarnistych pomijają potrzebę znajomości precyzji osiąganą w wielowymiarowych i wektoro-

When it is determined, on the same samples, two or more properties in order to evaluate a particulate product lot and/or its constituent/constituents, the estimate deviation Δ_{ij} of whatever specific characteristic corresponds with the probability marked by symbol P_{ij} . All the probabilities P_{ij} in common form the cumulative probability, symbolically denoted by P_w , relating to product quality given by the whole values of specific characteristics determined. As is noted on the theory of probability [3, 9], if these characteristics are statistically independent of each other, the probability P_w is given by the following product

Exceeding at least one estimation tolerance being the assumed deviation limit by the deviations of all values of specific characteristics forming a multidimensional or vectorial estimate, can occur at the probability $(P_w)_{un}$ equal to $1 - P_w$. Consequently, the specification of the whole values of characteristics pertains to uncertainty, the measure of which is the probability $(P_w)_{un}$.

It is easy to see that according as quantity of information drawn on a sample increases, the reliability of information set decreases. This dependence is real for a constant number of population units forming an estimate. Wanting to keep any identical uncertainty for lot qualities noted by different numbers of property values, it is necessary adequately to change the number of population units composing the estimate but it is possible only in the case of multielement estimates. Introducing in practice the evident true that the uncertainty value of a determination result set is a function of not only large amounts of property standard deviation but also the number of specify characteristic indicating lot quality, is an important condition to realise the advance and development of estimation method for particulate products.

8. Questions relating to requirements for estimate approximations

As previously proved, quantity and structure of derived data, the source of which is a lot sample, influences over the uncertainly value characterizing the specification of determination results of properties are to indicate the lot quality. On the other hand it is known that each of considered uncertainties corresponds with the precision of the taken into consideration estimate of quality characteristics of particulate material.

Actually, to estimate some specific characteristics of particulate materials, it is used the methods that

wych estymatorach oraz ujednoczenia jej poziomu. Gdy zaś poziom ten nie jest znany i nie jest ujednoczony, utrudnione i mało efektywne jest podejmowanie decyzji dotyczących przydatności czy użyteczności produktu ziarnistego.

Osiągnięcie postępu w zakresie doskonalenia procedur estymacji jakości produktów ziarnistych nie jest możliwe z pominięciem zalecanych metod jej wielowymiarowej i wektorowej estymacji. Wybór uzasadnionego rozwiązania estymacyjnej procedury poprzedza się analizą ekonomiczną. W ostatecznym efekcie chodzi o optymalizację poziomu precyzji estymatorów i o możliwość porównywania ryzyka wiążącego się z każdorazową oceną jakości produktów ziarnistych [21, 23].

W celu zapewnienia porównywalności i właściwego poziomu niepewności charakteryzującej rozmaite dane o jakości produktu ziarnistego, konieczne jest wprowadzenie i przestrzeganie wymagań dla precyzji estymatorów, szczególnie gdy jego jakość jest wyrażona wielowymiarowo i wektorowo. Najpierw trzeba ustalić wymaganą niepewność dla zbioru wyników obrazujących jakość produktu, na przykład że prawdopodobieństwo $(P_w)_{un}$ ma być równe 0,1 lub 0,5. Następnym krokiem jest wyznaczenie prawdopodobieństw P_{ij} takich, aby ich iloczyn wynosił $1 - (P_w)_{un}$. Można wybrać i zastosować jedną z zasad prowadzących do tego celu. Najbardziej oczywista i naturalna jest zasada równych poziomów ufności dla odchyłeń poszczególnych parametrów jakościowych [6, 12, 15].

Prawdopodobieństwa P_{ij} , które dają ich iloczyn równy $1 - (P_w)_{un}$, spełniają konieczny warunek dla wymaganych prawdopodobieństw estymacyjnych. Prawdopodobieństwa te i odchylenia standardowe poszczególnych właściwości w populacji generalnej oraz założenie, że odchylenia właściwości estymatorów są zmiennymi losowymi, stanowią punkt wyjścia do obliczenia pożądanych lub wymaganych odchyłeń estymatorów. Wymagane odchylenia estymatorów, wartościom których przyporządkowuje się odpowiednie półprzedziały ufności są granicznymi wartościami liczbowymi, które nazywają się *tolerancjami estymacyjnymi*. W każdym stadium estymacyjnym odchylenia estymatorów i tolerancje estymacyjne są wyrażone analogicznymi wzorami.

Odpowiednia estymacja jakości produktów ziarnistych ma miejsce wówczas, gdy spełnia się wymagania ustalone dla precyzji estymatorów. W zależności od oznaczanej charakterystyki jakości produktu, estymacyjne wymagania zaliczają się do następujących grup odpowiadających pożądanemu zakresowi informacji:

- **jedna właściwość produktu**, estymator której jest *jednowymiarową zmienną losową* (estymacja jednowymiarowa); jako wymagania podaje

pass over the necessity to know the precision which is attained for multidimensional and vectorial estimate and to uniform its magnitude. If this magnitude is not known and uniformed then in consequence it is not convenient and effective to make a decision in reference to usefulness or usability of particulate product.

To bring off the expected improvement in perfecting of estimation procedures for particulate material properties, is not possible without applying the recommended method of multidimensional and vectorial estimation. On the basis of economical analyses, it is selected the proper solution of estimation procedure. The final purpose is to optimize the level of estimate reliability and to enable to set beside the risk which pertains to ever evaluation of particulate product quality [21, 23].

In order to assure the desirable amount and comparability of uncertainty for diverse sets of findings on product quality, it is indispensable to carry in and observe the requirements for precision of estimates and particularly as the product quality is expressed multidimensionally and vectorially. To begin with it is stipulated the required uncertainty for the set of results expressing the lot quality, for example the probability $(P_w)_{un}$ shall be equal to 0,1 or 0,5. Afterward it is to stipulate such all probabilities P_{ij} in order to obtain the product of them amounts to $1 - (P_w)_{un}$. The possibility is to pick out and use any one of some diverse principles giving rise to it. The most obvious and natural is the principle of equal confidence level for each of deviations of estimated characteristics [6, 12, 15].

The probabilities P_{ij} forming their product equal to $1 - (P_w)_{un}$ come up to the necessary condition for a sequence of estimation probabilities required. These probabilities and standard deviations of particular properties in the general population as well the assumption that the estimate deviations are the random variables, are the point of departure to calculate the estimate deviations demanded or required. The required values of estimate deviation are given by half of the corresponding confidence interval. These are the limit values termed *the estimation tolerances*. The estimate deviations and the estimation tolerances are expressed by the analogous formulas in every estimation stage.

The satisfied estimation of average quality of particulate lot is made when the requirements for estimate precisions are fulfilled. In dependence on a case of determination properties, the estimation demands or requirements are included to the following groups correspond with the desired quantity of information about the lot quality:

- **a single product property**, the estimate of which is *a one-dimensional random variable* (one-dimensional estimation) – it is stated the

się prawdopodobieństwo PS i tolerancję Δ_i dla parametru jakości z estymatora,

- **grupa właściwości produktu**, estymator których jest *wielowymiarową zmienną losową* (estymacja wielowymiarowa); jako wymagania podaje się prawdopodobieństwo PM i tolerancje $(\Delta_i)_i$ dla poszczególnych parametrów jakości z estymatora,
- **właściwość lub grupy (grupa) właściwości komponentów (komponentu) produktu ziarnistego**, z dołączoną grupą jego średnich właściwości lub bez niej, estymator których jest *wektorową zmienną losową*; jako wymagania podaje się prawdopodobieństwo PV i tolerancje $(\Delta_i)_{ij}$ dla poszczególnych parametrów jakości z estymatora.

Wymagania te służą do porównywania z nimi uzyskanej precyzji estymatorów wieloelementowych. W przypadku stwierdzenia dużych różnic, odpowiednio reguluje się liczbę jednostek populacji generalnej, tworzących estymatory.

Procedura estymacyjna, w której statystyczne przybliżenie estymatora jest dostosowane do ustalonych wymagań, zapewnia najkorzystniejszy poziom miarodajności wyników obrazujących jakość produktu ziarnistego. Podstawowym estymatorem, dla którego ustala się wymaganą wartość liczbową precyzji w stosunku do rzeczywistej wartości liczbowej właściwości w partii produktu ziarnistego, jest końcowy wynik oznaczania tejże właściwości. Wymagane precyzje dla estymatorów otrzymanych w postaci próbek w różnych stadiach procedury, określa się w nawiązaniu do wspomnianej wartości podstawowej. Mając dane tolerancje estymacyjne, konieczne jest zapewnienie ich dotrzymania przez estymatory przewidziane w procedurze mierzącej do oznaczenia jakości produktu ziarnistego. Liczba jednostek losowania wchodzących w skład estymatora musi być dostosowana do tych wymagań, biorąc pod uwagę znane odchylenia standardowe w populacji jednostek losowania. Jeżeli odchylenia te nie są znane, należy określić je eksperymentalnie. W praktyce jest to bardzo trudne i w szczególności wymaga zastosowania metod indywidualnie dostosowanych do rozmaitych produktów ziarnistych. Oczywiście duża zmienność właściwości i warunków produkcji dotyczy nie tylko różnorodnych produktów ziarnistych lecz częstokroć takiego samego produktu produkowanego w różnych miejscach.

Zastosowanie wielowymiarowej i wektorowej metody estymacji jakości wyrażonej wielowymiarowo lub wektorowo, przynosi zagadnienia dotyczące porównywalności statystycznych przybliżeń estymatorów.

probability PS and the tolerance Δ_i for the estimate characteristic, as the requirements,

- **more than one product property**, the estimate of which is *a multidimensional random variable* (multi-dimensional estimation) – it is stated the probability PM and the tolerances $(\Delta_i)_i$ for the individual specific characteristics of estimate as the requirements,
- **the specific characteristic or group (groups) of specific characteristics of product component (components)** and the group of the lot average characteristics may be else added, the estimate of which is *a vectorial random variable* (vectorial estimation) – it is stated the probability PV and the tolerances $(\Delta_i)_{ij}$ for the individual specific characteristics of estimate as the requirements.

These requirements are needed to compare with them the obtained precision of multielement estimate and in the case of large differentiations, to adjust the number of population units are to enter into its composition.

The estimation procedure in which statistical approximations of estimates are aimed for established requirements, guarantees the most profitable level of reliability for results representing the particulate product quality. The fundamental estimate for which it is established the required value of precision, is the final determination result as a estimate of the true value of lot. With reference to this value, the stage components of estimate precision are appointed as the required values of precision for the stage estimates in shape of samples. Having the estimation tolerances, it is indispensable in order to assure in the method being used to determine the quality of particulate lot that the precision of the estimates involved will not exceed these tolerances. The number of sampling units are to enter into the composition of an estimate, has be adjusted according to the assumed requirements and taking into consideration the known standard deviations in the sampling unit population. If the needed standard deviations are unknown, it is necessary to determine they by experimental method. This problem is very difficult and requires, in particular, to apply some methods individually fitted in to diverse particulate products. Of course, large variability in the properties and production conditions, exists not only among diverse particulate products but also in the same kind of particulates made in different sources.

Making use of the multidimensional and vectorial method of estimating when quality of lot is multidimensional or vectorial expressed, causes some important notions relating to comparability of estimate statistical approximation.

Jednym z nich jest problem równoważności dotyczący różniących się od siebie danych liczbowych, a więc przedstawienie tej samej wypadkowej precyzji wielowymiarowego czy wektorowego estymatora — za pomocą różniących się od siebie danych liczbowych. Ten problem jest spowodowany możliwością wyrażenia tej samej wypadkowej jego precyzji za pomocą różnych wartości liczbowych odchyłek lub tolerancji estymacyjnych, przyporządkowanych poszczególnym jego parametrom jakościowym. Wszystkie tolerancje estymacyjne ustalone dla wielowymiarowego lub wektorowego estymatora interpretuje się jako jedną całość informującą o jego pożądanej precyzji. Jeżeli są dane dwa lub więcej zestawień tolerancji dla tych samych właściwości tej samej partii produktu ziarnistego, które reprezentuje estymator, lecz niektóre tolerancje dla analogicznych właściwości są większe, a inne mniejsze, to jak się je porównuje pod względem wiążącego się z nimi statystycznego przybliżenia? Polega to na przeprowadzeniu obliczeń wielkości próbki dla każdego z porównywanych zestawień tolerancji estymacyjnych. W przypadku tej samej partii produktu ziarnistego, wielkość próbki jest podstawą wnioskowania o wypadkowej precyzji estymacyjnej, ponieważ jest funkcją wszystkich tolerancji i jej jednoznacznym miernikiem. I tak, większa próbka świadczy o większym przybliżeniu rzeczywistych parametrów partii produktu, wiążącym się z danym zestawieniem tolerancji estymacyjnych niż mniejsza próbka, a jednakowe wielkości próbek wskazują, że porównywane zestawienia są ekwiwalentne i wyrażają takie same statystyczne przybliżenie dla branego pod uwagę wielowymiarowego lub wektorowego estymatora.

Inne zagadnienie dotyczy równoważności próbek pod względem statystycznego przybliżenia w przypadku takich samych zestawień estymowanych właściwości, ale różnych statystycznych charakterystyk produktu ziarnistego. Żeby otrzymać jednakowe statystyczne przybliżenia dla takich zestawień, wielkości próbek z takich produktów muszą być różne. Wobec tego estymacyjnie ekwiwalentne, to jest mające ten sam stopień reprezentatywności, są takie próbki, które mają takie samo wypadkowe statystyczne przybliżenie swoich właściwości — do średnich właściwości partii produktu ziarnistego, cechujące ich identyczne zestawienia.

Reasumując, jest oczywiste, że rozmaite zestawienia właściwości przedstawiające jakość produktu ziarnistego różnią się stopniem komplikacji, a powiększanie stopnia ich komplikacji powoduje powiększanie masy próbek, jeżeli chce się utrzymać ich reprezentatywność na stałym poziomie. Gdy masa próbki pozostaje stała mimo powiększenia komplikacji zestawienia informującego o jakości produktu ziarnistego, precyzja estymacji obniża się. Masa próbek

One of them is the question of equivalence which relates to some lists of numerical data quantitatively presenting the estimate precision, that is the question of expression of the same resultant precision of multidimensional or vectorial estimate by some specifications with different numerical data. This question arises from the possibility to express the same resultant precision of one by different values of deviation or tolerance for its successive specific characteristic. All the tolerances established for a multidimensional or vectorial estimate are interpreted as one entirety informing about its assumed or desirable precision. If two or more lists with tolerances for the specific characteristic of an estimate are given but some of tolerances are greater and others are smaller for the same specific characteristic, how to compare and evaluate such lists in point of their statistical approximations? The adequate manner consists in performing necessary calculations. The compared lists are used in calculating the sample sizes for the same particulate lot. The size of sample is the basis which indicates as is the relative order of precision magnitude of some tolerance lists in the case of taking for calculations a constant statistical description of sample population. A larger sample indicates the more closeness of agreement to the true quality of the lot than a smaller sample and the same size of sample indicates that such lists are equivalent with point of view of considered closeness and accordingly express the same statistical approximation for the multidimensional or vectorial estimate taken into consideration.

The next notion is pertained to the problem of equivalence with regard to statistical approximation for samples in the case of identical sets of determined properties however particulate materials have statistical distributions differing among themselves. To obtain the same statistical approximations for such materials, the sample size have to be different for each. Therefore these samples are estimationally equivalent as representatives of lot average characteristics, the statistical approximations of which for their property values, are equal in the case of the identical lists of product properties.

Consequently, it is evident that diverse sets of specific characteristics, which express the quality of a particulate lot, differ among each other by degree of complication and according as this degree increases, the sample size should increase too, if the constant level of sample precision is to be kept always. Then, if the sample size is not changed although the information obtained on lot is larger, the precision of a such information is decreased. As long the complication of set of determined properties and the precision of estimation are constant,

ulega również zmianie przy stałym poziomie komplikacji zestawienia oznaczanych właściwości oraz precyzji estymacji w miarę jak zmieniają się statystyczne rozkłady zmiennych losowych w populacjach jednostek losowania produktów ziarnistych.

9. Dostosowanie wielkości próbek w celu otrzymania wymaganej precyzji estymacyjnej

Przed dopuszczeniem procedury estymacyjnej do stosowania, sprawdza się czy jej użycie w danych warunkach lokalnych zapewni spełnienie wymagań estymacyjnych. Sprawdzenie to polega na porównaniu precyzji końcowych wyników oznaczania, reprezentujących jakość partii produktu ziarnistego z ustalonymi tolerancjami estymacyjnymi. Gdy jego wynik jest pozytywny, zaprojektowana procedura może być stosowana. Jeżeli zaś wynik ten jest negatywny, ponieważ jeden lub więcej stadiów procedury nie zapewnia wymaganej precyzji estymatorów, są one identyfikowane i sposób postępowania dostosowuje się do istniejących uwarunkowań naturalnych. W pierwszej kolejności zwraca się uwagę na estymatory wieloelementowe, których precyzję można regulować zmieniając liczbę jednostek losowania, wchodzących w ich skład. Po zakończeniu wspomnianych czynności, udoskonaloną procedurę dopuszcza się do stosowania. Sprawdzenie precyzji estymatorów powtarza się, gdy powstają wątpliwości czy wymagania estymacyjne są spełniane.

Poniżej podaje się model zalecanych wzorów służących do dostosowywania wielkości próbek, na przykładzie wzorów dotyczących próbki ogólnej. Jak wykazano poprzednio, postać wzoru zależy od rodzaju zmiennej losowej, którą wskazuje zestawienie oznaczanych właściwości. Podstawą tych wzorów są modele matematyczne omówione w szóstym rozdziale. Zakłada się, że zmienne losowe mają w przybliżeniu rozkłady normalne, jak to najczęściej się zdarza w rzeczywistości.

Wielkość próbki a ogólnie biorąc liczbę jednostek populacji generalnej wchodzących w skład estymatora wyraża się symbolem n .

Zmienna losowa jednowymiarowa

$$n_u = \frac{s_u^2}{\frac{(\Delta_t)_d^2}{i^2(p_s)} - s_l^2 - s_a^2 - \frac{s_d^2}{n_d}}$$

Zmienna losowa wielowymiarowa

$$\prod_i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{(\Delta_t)_d^2}{i^2(p_s)}}^{\frac{(\Delta_t)_d^2}{i^2(p_s)}}$$

$$e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = P_M$$

the sample size has to be only adjusted with regard for the statistical parameters of the random variable in the population of sample units of a particulate lot.

9. Adjusting the sample size to obtain required precision in estimation

An estimation procedure is checked before admission it to apply will attainment of the obliging requirements for precision in estimation be assured for the local conditions existing in practice. The check consists in evaluating the precision of the final determination results which show quality of particulate lot. When the outcome of checking is positive then this procedure may be used. If the result of checking is negative for one or some of all the stage estimate deviations have not met the requirements, such stages are indicated and the stage operations are aimed for the actual conditions. Above all, it is paid attention to the multi-element estimates, the precision of which may be changed by a number of sampling units that will be to enter into composition of each. After being over the sayed operations, it is permitted to apply the properly perfected estimation procedure. Next checking of estimate precision should be then carried out when some doubts will be appeared that the estimate deviations come up to the estimation requirements.

The model of recommended formulas used of adjustment of the sample size is stated below on example of the analogous formulas appertain to the gross sample. As previously pointed aut, the structure of formula is depended on the type of random variable which is indicated by the quality characteristic list. The mathematical models described in the sixth part are the basis of the formulas brought forward. It has assumed that the random variables are approximately normally distributed, as is mostly coming about in reality.

The sample size, and in general, the number of population units being composed of estimate is symbolically represented by n .

One-dimensional random variable

Multi-dimensional random variable

Zmienna losowa wektorowa

Liczba $(n_u)_j$ próbek pierwotnych dla estymatora grupy właściwości oznaczanych w j -tym komponencie produktu ziarnistego

$$\prod_{i(j)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{(\Delta_t)_{dij}^2}{\sqrt{\frac{(s_u)_{ij}^2}{(n_u)_j} + (s_l)_{ij}^2 + (s_a)_{ij}^2 + \frac{(s_d)_{ij}^2}{n_d}}}}^{\frac{(\Delta_t)_{dij}^2}{\sqrt{\frac{(s_u)_{ij}^2}{(n_u)_j} + (s_l)_{ij}^2 + (s_a)_{ij}^2 + \frac{(s_d)_{ij}^2}{n_d}}}}$$

Zazwyczaj liczby jednostek obliczone w ten sposób dla poszczególnych komponentów badanego produktu ziarnistego są różne. W przypadku produktów ziarnistych taki rezultat jest spowodowany przyczynami naturalnymi. Żadna z liczb próbek pierwotnych, pożądaných dla jednego z komponentów tworzących produkt ziarnisty, nie jest zadawalająca dla ich mieszaniny. Podstawą rozwiązania problemu liczby próbek pierwotnych w próbce ogólnej jest znajomość teoretycznego uzasadnienia [3, 9, 13], że ilości komponentów wchodzących w skład próbki są niezależnymi od siebie zmiennymi losowymi, a zatem takie są również znajdujące się w niej komponentowe liczby jednostek losowania. Opierając się na tym, w celu obliczenia odpowiedniej liczby jednostek losowania w próbce ogólnej, korzysta się z uzupełniającego kryterium statystycznego [6, 13, 15]. Kryterium tym jest poziom ufności, przedstawiający prawdopodobieństwo otrzymania w próbce ogólnej potrzebnych liczb jednostek losowania z poszczególnych komponentów, wyrażony symbolem P_g . Z teorii rachunku prawdopodobieństwa [2, 3, 5, 8, 9] wiadomo, że w przypadku niezależnych zmiennych losowych, wypadkowe prawdopodobieństwo otrzymania w próbce co najmniej tyle liczb jednostek losowania — ile określono z góry, jest równe iloczynowi poszczególnych prawdopodobieństw otrzymania w niej każdej z tych liczb. Zależność tę przedstawia następujący wzór

$$\prod_j \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{n_u - n_j}{\sqrt{n_u(1-w_j)}}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = P_g$$

w którym w oznacza udział komponentu w produkcie ziarnistym.

10. Podsumowanie

Estymacja jakości produktu ziarnistego, określonej jego licznymi właściwościami, z których wiele jest właściwościami jego komponentów, z reguły jest bardzo trudna. Trudności w tym zakresie są

Vectorial random variable

The number $(n_u)_j$ of increments for the estimate of a number of characteristics determined on j -th component of product

$$e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = P_j = P_V^{L_j} (\sum L_j)^{-1}$$

Usually the numbers of units, which are computed in this manner for diverse components of the examined particulate material, are different. Such a result is caused by natural attributes of particulates. Intending to examine the quality of particulate product on one gross sample, ever increment number computed for one of components is not adequate for the examined product as blend of these components. The basis of the solution worried out this problem is the knowledge that in reality, the quantity of component material which enter into composition of sample, is a random variable being statistically independent of such other quantities [3, 9, 13], and accordingly the component population unit numbers into a sample are analogous variables. It is the basis to involve the supplementary statistical criterion for the purpose of computing the desired number of sampling units to form a gross sample [6, 13, 15]. A confidence level as the probability of obtaining the needed numbers of sampling units from individual components into the gross sample, symbolically expressed by P_g , is the appropriate criterion. As is known on the probability theory [2, 3, 5, 8, 9], in the case of independent random variables, the resultant probability that the numbers (which are above specified) of component units into a gross sample will be at least realized, is equal to the product of individual probabilities that each of these numbers will be realised into it. This dependence is given by the following formula

where w is the share of component in a particulate lot.

10. Conclusions

To estimate of particulate product quality being evaluated by plenty of specific characteristics among which there is a large number of characteristics of product components, as a rule is very difficult. The

spowodowane po pierwsze — umownością interpretacji partii produktu ziarnistego jako populacji statystycznych jednostek losowania i po drugie — dużą ilością informacji przedstawiających jakość produktu ziarnistego, przy czym niektóre z nich dotyczą jego komponentów. Wyniki takiego badania są podstawą do oceny jaka jest jakość produktu i do decyzji o jego przeznaczeniu. W związku z niepewnością wyników oznaczania właściwości produktu ziarnistego powstaje ryzyko będące funkcją stopnia (poziomu) niepewności charakteryzującego zestawienie uzyskanych wyników oznaczania. W praktyce ilościowa znajomość niepewności wyników oznaczania jest bardzo pożądana. Umożliwiają to wzory zamieszczone w rozdziale siódmym. Jeżeli ocena stopnia niepewności estymacyjnej nie będzie satysfakcjonująca na tle ustalonych wymagań dla statystycznych przybliżeń estymatorów z uwzględnieniem potrzeb praktycznych, konieczne będzie odpowiednie dostosowanie procedury estymacyjnej, a w szczególności wielkości próbki ogólnej pobieranej z partii produktu ziarnistego, korzystając z wzorów podanych w rozdziale dziewiątym.

existing difficulties are brought on: first, by conventionality of interpretation of particulate lot as a statistical population of sampling units, and second, by a large number of properties established to describe quality of particulate material and that some of them relate to its components. The results of such an investigation are the basis of evaluating how is the quality of a lot and deciding on its destination. In connection with uncertainty of results of lot property determination, the risk appears as the function of the uncertainty amount which corresponds with the specification of properties presenting the quality of particulate product. In practice, knowledge of the uncertainty value of determination results is very desirable. One is possible by applying the formulas brought forward within the part 7th of this paper. If evaluation of the amount of estimation uncertainty will not be positive, the estimation procedure has to be adjusted, in particular the size of gross sample which is to be taken from particulate products. In the case, the formulas placed in the part 9th of this paper are used to assure the attainment of the requirements established with reference to the practical needs for the statistical approximation of estimates.

Literatura — References

1. Anderson T., W. 1958. *An introduction to multivariate statistical analysis*. John Wiley and Sons, New York.
2. Chao L., L. 1974. *Statistics. Methods and analyses*. John Wiley and Sons, New York.
3. Cramer H. 1946. *Mathematical methods of statistics*. Princetown University Press, New Jersey.
4. Deutsh R. 1965. *Estimation theory*. Prentice Hall Inc. Englewood Cliffs, New Jersey.
5. Freund J., E. 1962. *Modern elementary statistics. Third edition*, Prentice Hall Inc. Englewood Cliffs, New Jersey.
6. Martyniak J. 1994. *Miarodajność charakterystyk węgla w świetle analizy wielowymiarowej i wektorowej*. Prace Naukowe GIG nr 790, Katowice.
7. Martyniak J. i inni 2001. *Naturalne uwarunkowania statystycznych metod kontrolnych w procesie wzbogacania węgla*. Prace Naukowe GIG nr 844, Katowice.
8. Pawłowski Z. 1972. *Wstęp do statystycznej metody reprezentacyjnej*, PWN, Warszawa.
9. Youle G., U.; Kendall M., G. 1958. *An introduction to the theory of statistics. Fourteenth edition*, Charles Griffin and Co., London.
10. Zasepa R. 1972. *Statystyczna metoda reprezentacyjna*. PWE, Warszawa.
11. Gould G. 1996. *Bias testing: myths, misconceptions and mistakes*. *Journal of Testing and Evaluation*, Sept., pp. 333–346.
12. Martyniak J. 1973. *Wyznaczanie liczebności populacji próbnej z wielowymiarowego rozkładu normalnego oraz dokładności estymowania nadziei matematycznych jego zmiennych składowych*. *Przegląd Statystyczny* z. 2, str. 202–210.

13. Martyniak J. 1978. Liczebność próby dla szacowania średnich wartości cech w wyróżnionych częściach populacji generalnej. *Przegląd statystyczny* z. 4, str. 543–551.
14. Martyniak J. 1992. Wariacje właściwości kopaliny w populacjach próbek pierwotnych. *Archiwum Górnictwa* z. 2, str. 191–245.
15. Martyniak J. 1994. A multidimensional and vectorial criterion of representativeness for preparation properties of coal. *Gospodarka Surowcami Mineralnymi* t. 10, z. 2, pp. 229–249.
16. Martyniak J. 1994. A method to assess the reliability of coal preparation parameters characterizing a collected sample. *Gospodarka Surowcami Mineralnymi* t. 10, z. 4, pp. 569–575.
17. Martyniak J. 1997. Podstawy i przykłady szacowania mierników reprezentatywności próbek ogólnych węgla. *Przegląd Górniczy* nr 6, str. 26–30.
18. Martyniak J. 1998. The factors forming the interincrement variance. *Gospodarka Surowcami Mineralnymi* t. 14, z. 3, pp. 49–60.
19. Martyniak J. 1999. Związek między wielkością próbek pierwotnych a wariacją właściwości w ich populacji. *Przegląd Górniczy* nr 4, str. 23–27.
20. Martyniak J. 2000. Warunek zmniejszenia ryzyka błędu oszacowania właściwości kopaliny decydujących o jej zakwalifikowaniu do konkretnej kategorii jakościowej. *Gospodarka Surowcami Mineralnymi* t. 16, z. 1, str. 5–28.
21. Martyniak J. 2001. A criterion and evaluating method of agreement for the determined and the true quality of particulate material. *Archives of Mining Sciences* v. 46, 4, pp. 491–517.
22. Martyniak J. 2002. Problemy doskonalenia kontroli procesu produkcyjnego w zakładzie przeróbczym węgla kamiennego. *Wiadomości Górnicze* nr 12, str. 526–534.
23. Martyniak J. 2004. Niepewność wyników oznaczania właściwości produktu ziarnistego w badaniach wyrywkowych. *Gospodarka Surowcami Mineralnymi* T. 20, z. 2, str. 65–76.
24. Rose C., D., 1992. Applying statistical methods to coal quality issues. *Journal of Coal Quality* Vol. 11, No 3-4, pp. 33–38.