



# Generowanie krzywych wzbogacania stosowanych do charakteryzowania procesów separacji

## Generating upgrading curves used for characterizing separation processes (Technical note)

Jan DRZYMAŁA <sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> Dr hab. inż. prof. PWr.; Politechnika Wroclawska, Wydział Górnicy, Instytut Górnictwa, Zakład Przeróbki Kopaliny i Odpadów; Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław; tel.: (+48-71) 320 68 79, e-mail: Jan.Drzymala@ig.pwr.wroc.pl

RECENZENCI: Dr B. K. PAREKH; prof. dr hab. inż. Wiesław BLASCHKE

### Streszczenie

Wydzielanie dowolnego składnika nadawy do wzbogacenia produktu można charakteryzować za pomocą krzywych wzbogacania, które wiążą ilość wzbogaconego produktu z jego jakością. Gdy ilość wyrazi się w postaci wychodu ( $\gamma$ ) a jakość za pomocą zawartości wybranego składnika we wzbogacanym produkcie ( $\beta$ ), otrzymuje się wykres zwany krzywą Henry'ego. Jeżeli  $\gamma$  i/lub  $\beta$ , połączony z zawartością rozważanego składnika w nadawie ( $\alpha$ ), otrzymać można dodatkowe parametry wzbogacania jak: uzysk ( $\varepsilon$ ), współczynnik wzbogacenia ( $k = \beta/\alpha$ ), parametr Della  $w = \gamma/\alpha$ , czy też parametr  $\varepsilon/\alpha$ , które można użyć do wykreślenia innych krzywych wzbogacania. W tej pracy pokazano, że można wytworzyć nieograniczoną liczbę parametrów i po połączeniu ich w pary można otrzymać krzywe wzbogacania stosując ogólne równanie  $\gamma^a \beta^b / \alpha^c$ , gdzie  $a$ ,  $b$ , oraz  $c$  są liczbami z szeregu 0, 1, 2, .... Dla  $a = 0$  oraz 1,  $b = 0$  oraz 1, jak również  $c = 0, 1$ , oraz 2 otrzymano nie tylko krzywą wzbogacania Henry'ego  $\gamma = f(\beta)$ , ale także dobrze znane krzywe: Mayera  $\varepsilon = f(\gamma)$ , Halbicha-Halla  $\varepsilon = f(\beta)$ , Della  $\varepsilon = f(\gamma/\alpha)$ , oraz mniej znane krzywe jak  $\varepsilon = f(\beta/\alpha)$ ,  $\beta = f(\gamma/\alpha)$ ,  $\gamma = f(\beta/\alpha)$ . W pracy zasygnalizowano, że wykorzystując jeszcze bardziej ogólne równanie  $(\gamma_i)^x (\beta_j)^y (\alpha_i)^z$ , gdy  $x$ ,  $y$ , oraz  $z$  przyjmują wartości 0,  $\pm 1$ ,  $\pm 2$  .... itd., gdzie  $i$  oznacza produkt ( $i = 1$  lub 2), podczas gdy  $j$  oznacza składnik ( $j = 1$  lub 2) można wytworzyć jeszcze więcej krzywych wzbogacania, w tym np. krzywą Fuerstenaua, wiążącą  $\varepsilon_{11}$  z  $\varepsilon_{22}$ .

### Summary

Separation of a component from a feed can be characterized by upgrading curves that relate the quantity of the upgraded product with its quality. When the quantity is expressed as the yield of the product ( $\gamma$ ) and the quantity by the content of a selected component in the upgraded product ( $\beta$ ), the so-called Henry curve can be plotted. When the concentration of the considered component in the feed ( $\alpha$ ) is combined with  $\gamma$  and/or  $\beta$ , additional upgrading parameters including recovery ( $\varepsilon$ ), enrichment ratio ( $k = \beta/\alpha$ ), Dell's factor  $w = \gamma/\alpha$ , and  $\varepsilon/\alpha$ , can be created and used to plot other curves. It was presented in this work that unlimited number of upgrading parameters and upgrading curves can be generated using a general formula of  $\gamma^a \beta^b / \alpha^c$ , where  $a$ ,  $b$ , and  $c$  are 0, 1, 2, .... Using  $a = 0$  and 1,  $b = 0$  and 1, as well  $c = 0, 1$ , and 2 the well known plots:  $\gamma = f(\beta)$  (Henry),  $\varepsilon = f(\gamma)$  (Mayer),  $\varepsilon = f(\beta)$  (Halbich-Hall), and  $\varepsilon = f(\gamma/\alpha)$  (Dell) are obtained. In addition to that, less known and also new upgrading curves such as  $\varepsilon = f(\beta/\alpha)$ ,  $\beta = f(\gamma/\alpha)$ , and  $\gamma = f(\beta/\alpha)$  can be generated. It was also mentioned in the paper that a more general formula  $(\beta_{ij})^x (\gamma_j)^y (\alpha_i)^z$ , where  $x$ ,  $y$ , and  $z$  are equal to 0,  $\pm 1$ ,  $\pm 2$  .... while  $i$  stands for product ( $i = 1$  or 2) and  $j$  for component ( $j = 1$  or 2) is capable to generate many more upgrading curves, including the Fuerstenau curve which relates  $\varepsilon_{11}$  with  $\varepsilon_{22}$ .

## 1. Wprowadzenie

Dowolny proces separacji może być rozpatrywany jako wytwarzanie produktów lub jako wzbogacanie wybranego składnika, czy też jako klasyfikacja nadawy na frakcje o zmiennych właściwościach (Drzymala, 2001). Wytwarzanie produktu może być opisane jednym parametrem, na przykład wychodem ( $\gamma$ ), który jest ilościową miarą separacji. Jednakże opis separacji jako wzbogacanie i klasyfikacja wymaga dwóch parametrów dla pełnej ich charakterystyki. Jednym z parametrów jest wychód, który wskazuje ilość produktu, a drugim zawartość  $\beta$  składnika lub frakcji, która dostarcza informacji o jakości produktu. Gdy wykreśli się zależność  $\gamma$  od  $\beta$  (lub  $\beta$  od  $\gamma$ ), uzyskuje się wtedy najprostszą pod-

## 1. Introduction

Any separation process can be considered either as products formation, upgrading of a component in the products, or classification of the feed into fractions of varying properties (Drzymala, 2001). The product separation process can be fully characterized by one parameter, that is yield ( $\gamma$ ), which is a quantitative measure of the separation. However, the upgrading and classification approaches require two parameters for an adequate characterization. One of them is yield which indicates the quantity of the product and the other is content ( $\beta$ ) of a component or a fraction, which provide information on the quality of the product. When  $\gamma$  is plotted versus  $\beta$  (or  $\beta$  vs  $\gamma$ ), we get

stawową krzywą wzbogacania (Budryk i Stepiński, 1954; Stepiński, 1965), zwaną krzywą Henry'ego (Laskowski i inni, 1977). Zależność Henry'ego dobrze charakteryzuje proces separacji z punktu widzenia procesu wzbogacania. Jediną wadą krzywej jest brak informacji o jakości nadawy  $\alpha$ . Jeżeli ta informacja zostanie wprowadzona do bilansu, można uzyskać inne parametry, np. uzysk ( $\varepsilon$ ), który zdefiniowany jest jako  $\varepsilon = \gamma\beta/\alpha$ . Ponieważ  $\varepsilon$  zawiera w sobie iloczyn  $\gamma$  oraz  $\beta$ , posiada on podwójną ilościowo–jakościową naturę i może być stosowany zarówno zamiast  $\gamma$  jak i zamiast  $\beta$ . Wprowadzenie  $\alpha$ , a w konsekwencji np. uzysku ( $\varepsilon$ ), dostarcza dodatkowych parametrów, które mogą być stosowane do charakteryzowania procesów separacji jako wzbogacanie i wykreślić inne niż krzywe Henry'ego. Ogólna zasada wykreślania tych krzywych wzbogacania staje się teraz szersza, gdyż zamiast wykreślania zależności parametr jakościowy  $\beta$  od jakościowego  $\gamma$ , można teraz użyć następujące pary parametrów: jakościowy od ilościowego (lub odwrotnie), jakościowy od ilościowo–jakościowego, ilościowy od ilościowo–jakościowego, jakościowo–ilościowy od ilościowo–jakościowego (lub odwrotnie).

## 2. Generowanie parametrów i krzywych wzbogacania

Obecnie stosowane do wykreślania krzywych wzbogacania parametry są zwykle definiowane lub wyprowadzane przypadkowo, podczas gdy można je generować za pomocą ogólnych wzorów matematycznych. W tej pracy wytworzono parametry wzbogacania za pomocą ogólnego równania  $\gamma^a\beta^b/\alpha^c$ , gdzie  $a, b, c$  są zerem lub liczbami naturalnymi. Formuła ta generuje nie tylko większość znanych krzywych, ale także nowe wykresy. Wygenerowane parametry, dla  $a, b$  od zera do 1 i dla  $c$  od 0 do 2 podano w tabeli 1.

Gdy podane w tabeli 1 parametry wzbogacania połączy się w pary dla wszystkich możliwych kombinacji parametrów typu *jakość = f(ilości)*, *jakość = f(ilość–jakość)*, *ilość = f(ilość–jakość)* oraz *ilość–jakość = f(ilość–jakość)*, otrzymamy wtedy całą rodzinę krzywych wzbogacania. Wygenerowane krzywe wzbogacania podano w tabeli 2 oraz przedstawiono na rys.1. Krzywe zostały oparte na hipotetycznym procesie separacji, którego bilans podano w tabeli 3.

Należy zauważyć, że pewne kombinacje parametrów wzbogacania, należące do kategorii *ilość–ilość* [np.  $\gamma = f(\gamma/\alpha)$ ] oraz *jakość–jakość* [np.  $\beta = f(\beta/\alpha)$ ] czy też  $\varepsilon = \varepsilon/\alpha$  nie tworzą krzywych wzbogacania.

Chociaż wszystkie krzywe wzbogacania dostarczają tych samych informacji o separacji, ich forma geometryczna jest różna i dlatego niektóre szczególnie stają się bardziej widoczne niż inne.

a principal upgrading curve (Budryk i Stepiński, 1954; Stepiński, 1965), also known as the Henry plot (Laskowski et al., 1977). The Henry plot well characterizes separation process from the upgrading perspective. The only drawback of the curve is that it lacks information on the quality of the feed  $\alpha$ . Once  $\alpha$  is introduced into the consideration, we also can get another parameters, for instance recovery ( $\varepsilon$ ), which is defined as  $\varepsilon = \gamma\beta/\alpha$ . Since  $\varepsilon$  is a product of  $\gamma$  and  $\beta$ , it has a dual qualitative–quantitative nature, and it can be used as a substitute for either  $\gamma$  or  $\beta$ . Introduction of  $\alpha$ , and as a for instance recovery ( $\varepsilon$ ), provide additional parameters which can be used to characterize upgrading process and plot other than Henry's upgrading curves. Now, the general rule for plotting upgrading curves becomes wider and instead associating only quality parameter  $\beta$  vs quantity parameter  $\gamma$ , we can correlate the following classes of parameters: quality vs quantity, quality vs quality–quantity, quantity vs quality–quantity, and quality–quantity vs quality–quantity.

## 2. Generating upgrading parameters and upgrading curves

The quality, quantity and quality–quantity parameters are usually defined or derived randomly. It appears that they can be generated by means of various mathematical formulas. In this article the upgrading parameters have been generated from an equation  $\gamma^a\beta^b/\alpha^c$  where  $a, b, c$  is equal to 0 or any natural number. This formula generates not only most of the well known upgrading curves but also new plots. The generated parameters, for  $a, b$ , from 0 to 1 and for  $c$  from 0 to 2 are given in Table 1.

When the upgrading parameters are combined into pairs made of all possible combinations of *quality vs quantity*, *quality vs quality–quantity*, *quantity vs quality–quantity* and *quality–quantity vs quality–quantity* parameters we obtain a family of upgrading curves. The generated curves are listed in Table 2 and plotted in Fig.1. The curves are based on the inventory of a hypothetical separation process given in Table 3.

It should be noted that certain combinations of upgrading parameters falling into the categories of *quality vs quality* and *quantity vs quantity*, for instance  $\beta = f(\beta/\alpha)$  or  $\gamma = f(\gamma/\alpha)$  and also  $\varepsilon = \varepsilon/\alpha$  do not constitute upgrading curves.

Although all the upgrading curves provide the same information about separation, their geometrical forms are different, and therefore, certain detail are more apparent than others. As a result researchers

Dlatego badacze stosują różne krzywe wzbogacania, a wybór krzywej zależy od ich potrzeb i upodobań, cechy procesu, czy też estetyki.

use various upgrading curves and the choice of the curve depends on personal needs and preferences, feature of the process and in some cases esthetics.

Tablica 1

Wybrane\* parametry, które można użyć do charakteryzowania wzbogacania. Parametry utworzono za pomocą formuły  $\gamma^a \beta^b / \alpha^c$  gdzie  $a$ ,  $b$  i  $c$  mogą przyjmować wartości 0, 1, 2 .....

Table 1

Selected\* parameters which can be used for characterization upgrading. The parameters were generated from a general formula of  $\gamma^a \beta^b / \alpha^c$ , where  $a$ ,  $b$  and  $c$  can be 0 or any natural number

Lp. No.	Parametr Parameter	Wartości $a, b, c$ Values of $a, b, c$
1	$\gamma$ wychód yield	$a=1; b=0, c=0$
2	$\beta$ zawartość content	$a=0; b=1, c=0$
3	$\frac{\gamma}{a} = w$ wychód na jednostkę jakości nadawy yield per unit of feed quality	$a=1; b=0, c=1$
4	$\frac{\beta}{a} = k$ współczynnik wzbogacenia enrichment ratio	$a=0; b=1, c=1$
5	$\frac{\gamma\beta}{a} = \varepsilon$ uzysk recovery	$a=1; b=1, c=1$
6	$\frac{\gamma\beta}{a^2} = \frac{\varepsilon}{a}$ uzysk na jednostkę jakości nadawy recovery per unit of feed quality	$a=1; b=1, c=2$

\* W tej pracy nie wzięto pod uwagę parametru  $\gamma\beta$ , wyliczonego dla  $a=1, b=1, c=0$ , oraz parametry dla dużych wartości  $a, b$  i  $c$

\*In this work parametr  $\gamma\beta$ , calculated for  $a=1, b=1, c=0$  and parameters for high values of  $a, b$ , and  $c$  were not taken into account

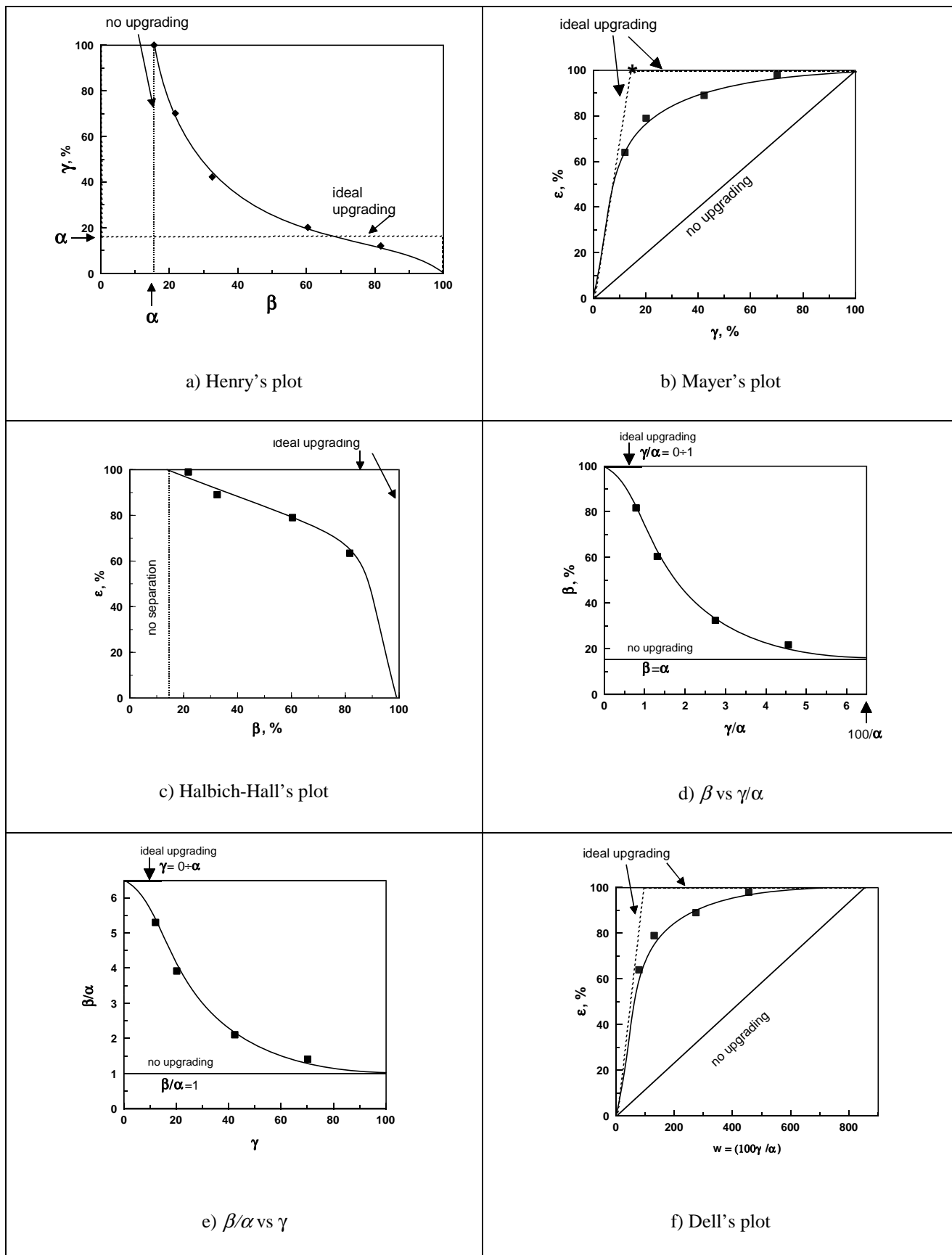
Tablica 2

Krzywe wzbogacania wytworzone za pomocą zależności  $\gamma^a \beta^b / \alpha^c$  dla  $a = 0$  oraz  $1, b = 0$  oraz  $1, c = 0$  oraz  $1$  lub  $2$

Table 2

Upgrading curves generated by means of formula  $\gamma^a \beta^b / \alpha^c$  for  $a = 0$  or  $1, b = 0$  or  $1$ , and  $c = 0$  or  $1$  or  $2$

Lp. No.	Zależność Relationship	Nazwa krzywej Name of upgrading curve	Uwagi Remarks
1	$\gamma = f(\beta)$	Henry (Reinhardt, 1911)	ilość = f (jakość) quantity vs quality
2	$\gamma = f\left(\frac{\beta}{a}\right)$	brak nazwy no name	ilość = f (jakość) quantity vs quality
3	$\gamma = f\left(\frac{\gamma\beta}{a} = \varepsilon\right)$	Mayer (1950, 1951, 1952a, 1952b)	ilość = f (jakość–ilość) quantity vs quality–quantity
4	$\frac{\gamma}{a} = w = f(\beta)$	brak nazwy no name	ilość = f (jakość) quantity vs quality
5	$\frac{\gamma}{a} = w = f(\varepsilon)$	Dell (1953, 1961, 1969, 1972)	ilość = f (jakość–ilość) quantity vs quality–quantity
6	$\frac{\gamma\beta}{a} = f(\beta)$	Halbich (1934), Hall (1971)	jakość–ilość = f(jakość) quality–quantity vs quality
7	$\frac{\gamma\beta}{a} = f\left(\frac{\beta}{a}\right)$	brak nazwy no name	jakość–ilość = f(jakość) quality–quantity vs quality
8	$\frac{\varepsilon}{a} = f(\gamma)$	brak nazwy no name	jakość–ilość = f(ilość) quality–quantity vs quantity
9	$\frac{\varepsilon}{a} = f(\beta)$	brak nazwy no name	jakość–ilość = f(jakość) quality–quantity vs quality
10	$\frac{\gamma}{a} = f\left(\frac{\beta}{a}\right)$	brak nazwy no name	ilość = f (jakość) quantity vs quality
11	$\frac{\gamma}{a} = f\left(\frac{\varepsilon}{a}\right)$	brak nazwy no name	ilość = f(jakość–ilość) quantity vs quality–quantity
12	$\frac{\beta}{a} = f\left(\frac{\varepsilon}{a}\right)$	brak nazwy no name	jakość = f(jakość–ilość) quality vs quality–quantity



Rys. 1  
Wybrane krzywe wzbogacania wygenerowane za pomocą wzoru  $\gamma^a \beta^b / \alpha^c$  dla małych wartości  $a, b, c$

Fig. 1  
Selected separation curves generated with the formula of  $\gamma^a \beta^b / \alpha^c$  for small values of  $a, b, c$

Tablica 3  
Dane do wykreślenia kumulowanych  
krzywych wzbogacania zamieszczonych na rys. 1

Table 3  
Data for plotting cumulative  
upgrading curves presented in Fig. 1

Produkt Product	$\gamma$ (%)	$100\gamma/\alpha$ (=w)	$\beta$ , (%)	$\beta/\alpha$ (=k)	$\gamma\beta/\alpha$ , (%) (=ε)	$\epsilon_{Mes}/\alpha$
Koncentrat Concentrate	K	12,06	78,31	81,70	5,30	4,12
Koncentrat II Concentrate II	K(II)= (K+K <sub>2</sub> )	20,14	130,77	60,40	3,92	5,13
Półprodukt Semiproduct	P= (K+K <sub>2</sub> +P <sub>1</sub> )	42,27	274,47	32,44	2,106	5,78
Półprodukt II Semiproduct II	P(II)= (K+K <sub>2</sub> +P <sub>1</sub> +P <sub>2</sub> )	70,14	455,45	21,73	1,41	6,43
Odpad Tailing	O	29,86	193,90	0,52	0,0338	0,066
Nadawa Feed	N	100,00	649,35	15,40	1	6,49

Wszystkie wytworzone w tej pracy krzywe wzbogacania, z wyjątkiem podstawowej  $\gamma$  od  $\beta$ , zawierają informacje o parametrze  $\alpha$  i ich kształt zależy od tego parametru. Dlatego nie są one użyteczne do porównywania procesów separacji, gdy skład nadawy nie jest stały. Wadę tę można usunąć, gdy wzbogacanie wybranego jednego składnika nadawy porówna się, w odpowiedni sposób, z innymi składnikami nadawy. To podejście będzie zaprezentowane w innej publikacji. Można tylko zasignalizować, że osiąga się to stosując bardziej ogólne równanie  $(\beta_{i,j})^x (\gamma_{i,j})^y (\alpha_{i,j})^z$ , gdy  $x$ ,  $y$ , oraz  $z$  przyjmują wartości  $0, \pm 1, \pm 2, \dots$  itd., gdzie  $i$  oznacza produkt ( $i = 1$  lub  $2$ ), podczas gdy  $j$  oznacza składnik ( $j = 1$  lub  $2$ ).

#### 4. Wnioski

Parametry wzbogacania i ich pary są stosowane do wykreślenia krzywych wzbogacania i można je generować za pomocą formuł matematycznych. Najprostszą z nich jest  $\gamma^a \beta^b / \alpha^c$ , gdzie  $a$ ,  $b$  oraz  $c$  są dowolną liczbą z szeregu  $0, 1, 2, \dots$  i pozwala ona otrzymać nie tylko większość znanych krzywych wzbogacania, ale także nowe zależności.

All the generated here upgrading curves, except the basic  $\gamma$  vs  $\beta$ , contain parameter  $\alpha$  and therefore, their shape is dependent on this parameter. As a result, they are not useful for comparison of separation results when the composition of the feed is not constant. This drawback is overcome when the upgrading of a selected component is compared, in an appropriate way, with the upgrading of another component of the feed. This approach will be presented in a future publication. It can only be mentioned that this can be accomplished using a more general formula  $(\beta_{i,j})^x (\gamma_{i,j})^y (\alpha_{i,j})^z$  where  $x$ ,  $y$ , and  $z$  are equal to  $0, \pm 1, \pm 2, \dots$  and  $i$  stands for product ( $i = 1$  or  $2$ ) and  $j$  stands for component ( $j = 1$  or  $2$ ).

#### 4. Conclusions

Upgrading parameters and their pairs used to plot upgrading curves can be generated by means of mathematical formulas. The simplest formula is  $\gamma^a \beta^b / \alpha^c$ , where  $a$ ,  $b$  and  $c$  are  $0$  or natural numbers, and it provides not only the known upgrading curves but also hitherto unknown relations.

#### 5. Literatura — References

1. Budryk, W., Stepiński, W., 1954. *Teoria przeróbki mechanicznej kopalni, skrypty uczelniane AGH, Kraków, PWN.*
2. Dell, C.C., 1953. *Release analysis — a new tool for ore-dressing research: Recent developments in mineral dressing, London, IMM, 75–84.*
3. Dell, C.C., 1961, *The analysis of flotation test data, Quarterly of the Colorado School of Mines, vol. 56, No.3, 113–127.*

4. Dell, C.C., 1969. *An expression for the degree of liberation of an ore*, *Trans. Inst. Min. Metal., Sec., C, Mineral Process Extr. Metal.*, 78, C152–C153.
5. Dell, C.C. et al., 1972. *Release analysis — a comparison of techniques*. *Trans. Inst. Min. Metal., Sec., C, Mineral Process Extr. Metal.*, 81, C89–C96.
6. Drzymala, J. *Podstawy mineralurgii*, Oficyna wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, 2001.
7. Halbich, W., 1934. *Über die Anwendungsmöglichkeiten einiger Netzmittel in der Flotation*, *Konrad Triltsch, Würzburg*.
8. Hall, W.B., 1971. *The mathematical form of separation curves based on two known ore parameters and a single liberation coefficient*, *Trans. IMM., Sec.C*, 80, C213–C222.
9. Laskowski, J., Łuszczkiewicz, A., Malewski, J., 1977. *Przeróbka kopalni*, *Wyd. Pol. Wrocł., Wrocław*.
10. Mayer, F.W, 1951. *Krzywe średniej wartości (krzywe „M”)*. Część I. *Metoda krzywych średniej wartości w przeróbce mechanicznej*, *Przegląd Górniczy*, 11, 446–452.
11. Mayer, F.W, 1952a. *Przemysłowe badania przeróbcze krzywymi „M”*. A. *Mieszanina dwu węgla*, *Przegląd Górniczy*, 3, 109–111.
12. Mayer, F.W, 1952b. *Przemysłowe badania przeróbcze krzywymi „M”*. B. *Mieszanina trzech i więcej węgla*, *Przegląd Górniczy*, 4, 148–153.
13. Mayer, F.W., 1950. *Die Mittelwertkurve, eine neue Verwackungskurve*, *Gluckauf*, 26, 498–509.
14. Reinhardt K., 1911. *Charakteristik der Feinkohlen und ihre aufbereitung mit Rücksicht auf der grösste Ausbringen*, *Glückauf*, 47 (6–7), 221, 257–264.
15. Stępiński W., 1965. *Krzywe średnich wartości*, *Rudy i Metale Nieżelazne*, R9, nr 10, 532–535, 1964; R10, nr 3, 117–120.